

geometrischen Konstruktion

Abbildung

Abbildung

Abbildung

Abbildung

150 / 592 b.

E i n l e i t u n g

z u r

geometrischen Construktion

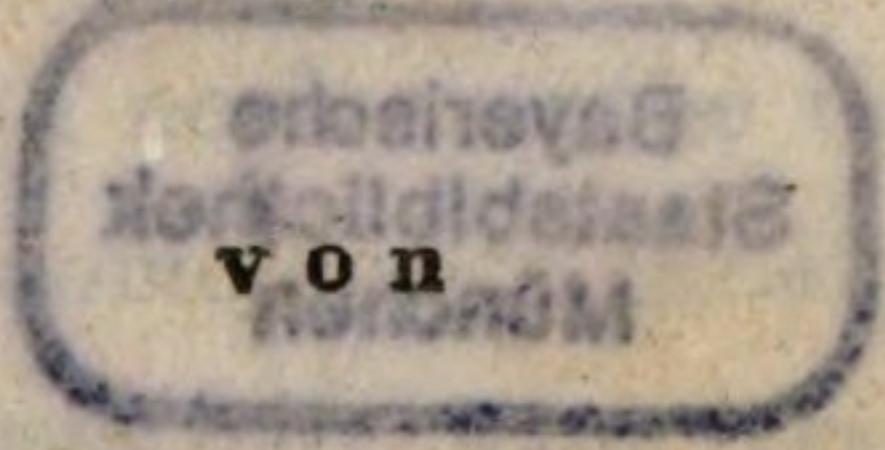
aller

P r o b l e m e

der

sphärischen Trigonometrie,

mittels welcher alle Zweydeutigkeiten der analyti-
schen Formeln gehoben werden.


v o n

F. v. S p a u n.

M ü n c h e n 1 8 1 1.

E i n l e i t u n g

1847

Geometrischen Konstruktion

von

P r o f e s s o r

an der

sphärischen Trigonometrie,

in welcher alle Eigenschaften der sphärischen

Trigonometrie abgeleitet werden.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

F. v. S p a n n

München 1847

V o r b e r i c h t.

Dieses Werk wird den Freunden ächter Geometrie eine neue, und, wie ich hoffe, nicht unwillkommene Erscheinung seyn. Die französischen Journale versichern zwar einstimmig, daß in der Geometrie nichts mehr neues erfunden werden könne, und daß unsere neuen Archimede alles so vollkommen aufgearbeitet haben, daß nur hier und da eine vergessene Aehre aufzulösen sey. Mir scheint, es gebe noch manche unentdeckte Länder im Gebieth der Geometrie. Allein, wenn wahr ist, daß wir diese Wissenschaft ganz erschöpft haben; wie kommt es denn, daß unsere Lehr-Methoden noch so unvollkommen und mangelhaft sind?

Die sphärische Trigonometrie hat für Anfänger un-
gemeine Schwierigkeiten. Ihre Lehrsätze sind eigentlich nur Rechnungs-Resultate, die mittels sehr combinirter algebraischer Evolutionen gefunden werden. Durch geometrische Construktion ist noch keiner derselben erwiesen worden. Man hielt es sogar für unmöglich einen solchen Beweis zu liefern, weil geometrische Konstruktionen auf die Ebene des Papiers beschränkt sind, und

die Grössen der sphärischen Dreyeke in verschiedenen Ebenen liegen. Noch vor wenigen Jahren versicherte Herr von Zach in seinen Ephemeriden, daß es durchaus unmöglich sey die sphärische Trigonometrie auf die geradlinigte zu reduzieren. Herr *Mauduit* versuchte solche Konstruktionen durch die Projektionen; Andere waren nicht glücklicher als er, und es scheint in der That beinah unmöglich die 3 Seiten und die 3 Winkel eines Dreyekes, die in verschiedenen Ebenen liegen, in dieselbe Ebene so nebeneinander zu legen, daß die unbekannten Grössen durch in derselben Ebene gezogene Linien bestimmt werden können, wenn man nicht auf die Wahrnehmung geräth, daß die 3 Seiten eines Kugel-Dreyeks, und die 3 Seiten eines anderen Kugel-Dreyeks, dessen Seiten die Supplemente der Winkel des ersten sind, einen Körper mit 6 Flächen bilden, die aus und nebeneinander gelegt werden können.

Der Verfasser liefert in diesem Werke den vollständigen geometrischen Beweis aller Formeln der sphärischen Trigometrie. Die Konstruktionen heben alle Zweydeutigkeiten und die Unbestimmtheit der Formeln auf. Sie zeigen für jeden besonderen Fall, ob nur ein Dreyek, oder ob deren zwey möglich sind. Sie gehen, wenn man sich guter Instrumente bedient, und mit Genauigkeit operiret, die unbekannten Grössen so genau, daß sie in Fällen, wo keine grosse Pünktlichkeit erfordert wird, die Rechnung überflüssig machen. Sie dienen also zur bequemern Controle der Rechnung und sind dadurch für die Nautik von ungemeinen Nutzen. Man weiß, daß der Steuermann täglich seinen Stand-Punkt auf der

Seekarte bestimmen müsse. Er muß demnach um diesen Punkt zu finden mehrere sphärische Dreycke berechnen. In diese Rechnungen schleicht sehr leicht ein Fehler ein, und nichts warnet den Rechner. Herr *Charpentier Cossigny*, der auf einem französischen Schiffe nach Ostindien reisete, sagt daß die Schifs-Rechnung das *Cap* 60 Grade östlich setzte, als er es entdeckte. Die Leichtigkeit sich zu irren bewog das National-Institut einen Preis für den Erfinder einer leichten Controle der Schifs-Rechnungen auszusezen. Den Preis erhielt Herr *la Grange* für einen Proportional-Zirkel mit 4 graduirten Schenkeln, deren Verschiebungen die gesuchten Grössen geben; allein diese sinnreiche Erfindung ist von keinem praktischen Nutzen, 1^{mo} weil die Theilung der Schenkel mit hinreichender Genauigkeit äusserst schwer ist; 2^{do} weil durch dieses Instrument die Zweydeutigkeit der Formeln nicht gehoben wird.

Die Construktions-Methode leistet alles was in diesem Fache der Steuermann wünschen kann. Sie ist leicht, bequem und gibt die gesuchten Grössen ohne Zweydeutigkeit, und mit mehr als hinreichender Genauigkeit; denn man stelle sich ja nicht vor, daß es dabey auf eine Präzision von Sekunden und Minuten ankomme. Diese Akuratesse ist ein mathematischer Luxus, der wie aller Luxus in Praxi mehr verderblich als nützlich ist. Herr *le Gentil*, ein französischer Mathematiker, der auf der Insel *Manilla* den Durchgang der Venus durch die Sonne beobachtete, schiffte sich zur Rückreise auf ein Indianisches Schiff ein, das nach den Persischen Meerbusen seeglete. Er wurde neugierig zu sehen, wie

der Steuermann seinen Punkt bestimme. Seine Methode war äusserst leicht und einfach. *Le Gentil* controlirte diese Reehnungen nach seiner Methode, und fand immer bis auf Kleinigkeiten dieselben Resultate. Der Steuermann schlich nicht längst der Küste hin, sondern steuerte in die hohe See, und fand auf dem kürzesten und geradesten Weege seine Einfahrt. — Als die Russische Flotte nach den Archipelagus seeglete, rief ein Schiff der Avantgarde in der Nordsee einen englischen Kauffahrer an, und foderte den Capitain an Bord. Dieser namm aus verschiedenen Fragen, die man ihm that, ab, daß der Russische Capitain und der Steuermann sehr rohe, unwissende Menschen seyen. Er seeglete weiter, und lief in den Haven von Lisabon ein, wo er die Russische Flotte mit dem Anhange ankündigte, sie werde wohl noch 6 Wochen mit ihren Stangen im Nebel herumfahren, ehe sie den Haven finde. Er hatte kaum ansgeredet, als man die Russische Flotte signalirte. *Marchand*, der neueste französische Weltumseegler führte doppelte Rechnung, und bestimmte seinen Punkt durch Schätzung (*Estime*) und nach Mondsdistanzen. Die Rechnungen wichen manchmale um mehrere Grade von einander ab; nach sehr kurzen Zeitfristen trafen sie aber bis auf Kleinigkeiten zusamm. Man braucht eben nicht *la Places* Weltsistem zu studiren um ein guter Steuermann zu seyn. Die Natur hat es so weißlich eingerichtet, daß alle nützliche und brauchbare Wahrheiten auch denen erreichbar sind, die keine Flügel haben, um sich in die transzenten und imaginären Regionen aufzuschwingen. Herr *Playfair*, Professor zu Edenburg gab in einem englischen Journale einen Auszug aus dem Weltsysteme des

Herrn *a Place*. Er schreibt, es sey eine Schande für die Engländer, daß sie in den Transzendental-Methoden, so weit hinter den Franzosen zurückblieben. Es seyen lange keine 6 Geometer in England, die im Stande seyen, dieses berühmte Werk zu verstehen; daraus müsse man aber nicht folgern, daß die mathematischen Wissenschaften in England vernachlässiget würden; allein man ziehe die streng geometrischen Methoden der Alten weit vor, und betrachte die neueren als ein unsicheres tatoniren, das nur in Fällen brauchbar sey, wo man auf dem alten Weege nicht fortkomme. Newton selbst, der doch mit so vieler Hize unserem Leibniz die Ehre der Erfindung der neuen Methode strittig machte, habe aus derselben kein grosses Aufheben gemacht, und immer die streng geometrischen Methoden weit vorgezogen. Aus dieser merkwürdigen Stelle des Englischen Journalisten urtheile ich demnach, daß das Werk, welches ich dem Urtheile der Leser unterwerfe, den Engländern nicht unwillkommen seyn werde, indem es die Construktions-Methoden der Alten auf einen Theil der Geometrie anwendet, der einer solchen Anwendung gar nicht fähig zu seyn schien. Lebten wir in den blühenden Zeiten der Mathematik, wo die Geometer aller Nationen in lebhafter Correspondenz stunden, sich ihre Werke und Erfindungen mittheilten, und jeder sein Scharflein beytrug, um das nützliche zu vervollkommen, so wäre ich vielleicht im Stande dem Leser etwas vollkommeneres vorzulegen. Allein die Bahn, die ich betrete, ist neu, und auf neuer Bahn ist es leicht zu sträuchlen. Ich habe also um so mehr einige gerechte Ansprüche auf die Indulgenz meiner Leser, als die we-

nigen Geometer, die ich kenne, und mit denen ich in Verbindung stehe, mit zu vielen anderen Geschäften be-
laden sind, als dafs sie eine Revision meiner Arbeit hätten übernehmen können. Damit ist es aber nicht gemeint die Strenge der Kritiker zu verbitten. Es wird vielmehr jede Bemerkung irgend eines Fehlers dem Verfasser willkommen seyn. Er gehöret nicht in die Classe jener deutschen Autoren, die das Critisiren ihrer Werke als ein Zeichen der Zeit, als ein Hinsinken der Deutschheit betrachten, und die Potenzen der deutschen Erde zur Rache gegen ihre Kritiker aufrufen. Man wird erinnern, dafs der Verfasser klüger handeln würde, sein Werk selbst zu verbessern, als die Kritiker dazu aufzufodern. Allein, wer nie einen ganz neuen Weeg gewandelt ist, hat keinen Begriff, wie schwer es ist, sich auf demselben zu Recht zu finden. Die alten Methoden und Grundsätze dringen sich unwillkührlich auf, und führen den Neuerer irre. Man misstrauet oft der Evidenz, wenn sie allgemein angenommenen Ideen und Säzen widerspricht, und wähnt die gefundene Demonstration sey eine mathematische Täuschung. Und dann kann jedermann sich irren, er mag ein Geometer, oder wohl gar ein Transzendental-Philosoph seyn oder nicht. Zum Glücke sind die Irrthümer des Verfassers der Methode selbst nicht nachtheilig. Die Konstruktionen bringen jeden auf den rechten Weeg zurück, wenn auch irgend ein *Deraisonnement* des Verfassers ihn davon abgebracht hätte. Ich wünsche also, dafs meine Censoren die Konstruktions-Methode selbst von dem *Raisonnement* über dieselbe unterscheiden mögten, und nicht jener zuschreiben, was auf das Sündenregister des Verfassers gehöret.

Allein ich verspreche mir ausserdem auch nebenher, daß man das blinde Herumtappen der algebraischen Methoden, nicht gegen die Evidenz in Schutz nehmen werde. Die Mißgriffe, zu denen uns die Regeln der Algebra verleiten, wenn man annimmt, daß das Produkt einer positiven durch eine negative Grösse negativ sey, sind in diesem Werke vollkommen erwiesen; und es ist der pithogorische Lehrsatz nicht gewisser, als daß, wenn die drey gegebenen Winkel eines Dreyekes spiz sind, die drey Seiten auch spiz, und ihre Cosinus positiv seyen, ungeachtet die algebraischen Operationen geben:

$$\cos A = \frac{-\cos \alpha - \cos \beta \cos \Delta}{\sin \beta \sin \Delta} \quad \text{Eben so gewiß}$$

ist es, daß diese durch algebraische Evolution gefundene Formel, so wie auch die, welche uns den Werth von $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} \alpha$, $\cos \frac{1}{2} \alpha$ geben, und andere nur Rechnungs-Resultate seyen, die noch nie directe erwiesen wurden. In so ferne ich nun die Geometer auf diese Mängel unserer algebraischen Methoden aufmerksam mache, und vollständigere Beweise unserer Lehrsätze liefere, glaube ich einige Verdienste um die Mathematik erworben zu haben.

Als ich dieses niederschrieb, war mir von den Constructions-Versuchen nicht viel mehr bekannt, als was *Mauduit* geliefert hat; Allein als ich den neuen Catalog der Königl. Bibliothek, der uns nunmehr in den Stand sezet, die Schätze derselben zu überschauen, durchgieng, so fand ich in der Abtheilung Trigonometrie folgendes Buch:

La Trigonometrie sphérique résolue par le moyen de la Regle et du Compas, d'ou l'on tire une maniere tres aisée et très lumineuse de la résoudre par les Sinus; par Simeon Valette. 8. Paris 1757.

Die Censoren der Akademie *la Caille*, *la Lande* etc. gaben dem Verfasser grosses Lob; allein es scheint mir nicht, daß seine Methode leicht, und sein Werk luminöser sey, als der Titul seines Buches, der nicht sehr deutlich ist. Hr. *Valette* und der Verfasser sind ganz verschiedene Weege gegangen. Des Hrn. *Valette* Verfahrens-Art ist eine modifizierte Projektions-Methode; Er zeigt wie die bekannten Gleichungen construiert werden können; der Verfasser reduzirt die Grössen auf die Horizontal-Ebene, und deduziert die Gleichungen aus den geometrischen Konstruktionen. Man wird sich bey der Vergleichung überzeugen, daß der Verfasser Herrn *Valette* nichts abgeborget habe. Indessen hätte sein Versuch die sphärische Trigonometrie auf die geradlinigte zu reduzieren, und ihre Probleme durch geometrische Konstruktionen zu erweisen einige Aufmerksamkeit verdient; allein in Frankreich und in Deutschland hat die Algebra die Konstruktions-Methode ganz verdrängt, ungeachtet die letzte leichter und befriedigender ist, und die Zweydeutigkeiten und Mißgriffe verhüthet, die bey der algebraischen Methode statt haben.

Ein Theil der Geometrie, der noch sehr ungebauet ist, und die Aufmerksamkeit der Mathematiker wohl verdiente, ist die Perspektiv. Die bessern Werke, die wir

hierüber haben, sind Lamberts freye Perspektiv, und die erst vor wenigen Jahren in Frankreich erschienene *Traité de Perspective par Lavit*. Allein Lamberts freye Perspektiv ist schwerer, als die gewöhnliche, die mittels eines Grundrisses gezeichnet wird, und überladet die Zeichnung mit Linien und Skalen; Ihre Anweisungen sind nicht allgemein und nicht streng geometrisch erwiesen. Für den praktischen Künstler sind zwar diese Beweise überflüssig, aber dagegen fodert er leichte und allgemeine praktische Anweisungen; Er findet sich also in Lamberts Buche nicht zu recht. *Lavit* ist praktischer und gibt Muster für viele Fälle: Es sind deren noch weit mehr, die er nicht berührt, und wo der Künstler, der kein Mathematiker ist, sich nicht zu helfen weiß.

Die Konstruktionen der sphärischen Trigonometrie heben alle diese Schwierigkeiten, und reduzieren alle möglichen Aufgaben der Perspektiv auf eine einzige: nemlich den Fluchtpunkt jeder im Raume gegebenen Linie durch eine leichte Konstruktion auf einer gegebenen Tafel zu bestimmen. Dafs die Auflösung dieses Problemes in der größten Allgemeinheit möglich sey, erhellet daraus, dafs die Lage jeder Linie gegen andere durch drey Winkel bestimmt werde, von welchen zwey als die Seiten, die dritte als der Neigungswinkel derselben in einem Kugeldreyecke betrachtet werden können. Mehrere Geometer mögen vor dem Verfasser dieses Problem und seine Auflösung gekannt haben; allein der Künstler ist selten ein Geometer, und wäre er es auch, so gäbe ihm die Berechnung ein saures Stück Arbeit. Die Konstruktionen, und er braucht derselben

für alle möglichen Fälle nur eine einzige zu wissen, weisen ihn mit Zuverlässlichkeit zu recht, wenn er auch bloß mechanisch und somit gar nicht weiß, warum er so operiret. Er kann, wenn er einen guten proportionalen Zirkel, und einen Transporteur hat, den Grundriß und die Lambertischen Gradskalen entbehren, und besudelt seine Tafel nicht durch die auf derselben gezogenen Linien. Diese Methode das Perspektiv zu behandeln, und die Anwendung der Konstruktionen auf die Problemen der Gnomonik werden demnächst als eine Fortsetzung dieses Werkes erscheinen, wenn sich eine hinreichende Anzahl Subskribenten zu Dekung der Kosten findet; denn die vielen Kupfer, welche ein solches Werk erfordert, erlauben dem Verfasser nicht auf sein Risiko eine Auflage zu veranstalten.

Der werthe Leser erlaube den Verfasser noch eine Bemerkung. Wenn unsere mathematischen Lehrbücher einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht haben, so sind sie erst nach Jahrtausenden dahin gelangt. Sie wurden nach und nach durch die Bemühungen unzähliger Geometer verbessert. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß Euklyd, Archimed etc. alles aus sich ausgesponnen haben. Was wir von den Kenntnissen der Indianer oder Braminen in diesem Fache durch *Plaisir* und andere erfahren haben, macht es sehr wahrscheinlich, daß sie auf Fundamente bauten, die andere gelegt hatten. Ich glaube also auf die Nachsicht der Leser rechnen zu dürfen, wenn ich nicht in diesem ersten Versuche die Vollkommenheit erreicht habe, welche diese neue Methode in der Folge erlangen wird. Die Konstruktionen bestim-

men zwar, wenn sie mit der erforderlichen Genauigkeit entworfen werden, jedem einzelnen Fall und geben an, ob die durch die gegebenen Grössen gesuchten Grössen spiz oder stumpf seyen; allein wenn man daraus allgemeine Weisungen abstrahiren will, so ist man öfters in der Gefahr sich zu irren, und dieses könnte manchmale der Fall in diesem Werke seyn. Ich hoffe, daß meine Fehler den Rezensenten nicht entgehen werden; wünsche aber zugleich daß die Rügung derselben so gefasst sey, daß ich dadurch in den Stand gesetzt werde, sie zu verbessern. Vorzüglich empfehle ich die §phen 61 und 62 der Aufmerksamkeit der Leser; man nemme aber dabey die Construkzionen zu Hilfe. Der Verfasser bedient sich hiezu eines 6zölligen Transporteurs, der hinreichend genau ist. Jede Censur wird dem Verfasser willkommen seyn; aber die von einer Meisterhand die erwünschlichste.

Allgemeine Vorbegriffe.

§. 1. Wenn eine Fläche eine Kugel so schneidet, daß der Schnitt durch den Mittelpunkt derselben gehet, so ist der Schnitt eine Kreisfläche. Er theilt die Kugel in zwey gleiche Halbkugeln.

§. 2. Gehet der Schnitt nicht durch den Mittelpunkt, so ist er zwar auch eine Kreisfläche, aber der Diameter derselben ist kleiner als der Diameter der Kugel; und darum nennt man jene Schnitte, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, größte Kreise.

§. 3. Ein auf dem Mittelpunkte eines größten Kreises senkrechter Durchmesser der Kugel wird die Axe desselben genannt. Die auf der Oberfläche der Kugel liegenden Endepunkte dieser Axe nennt man Pole,

§. 4. Schneidet ein zweyter größter Kreis die Kugel, so ist die Durchschnitts-Linie beeder Kreise ein gemeinschaftlicher Diameter, der also durch den Mittelpunkt der Kugel geht. — Liegt die Axe der einen Kreisfläche in der anderen, so sind die beeden Kreise senkrecht auf einander, und sie theilen den Kreis in vier gleiche rechtwinklichte Spalten.

§. 5. Liegt die Axe der einen Kreisfläche ausser der Ebene der anderen, so ist ihr Neigungswinkel auf

der einen Seite spiz, auf der anderen stumpf. Sie theilen den Kreis in 4 Spalten, wovon je zwey und zwey entgegengesetzte gleich, die nebeneinander liegenden ungleich sind. Zwey nebeneinander liegende Spalten sind der Halbkugel gleich.

§. 6. Der Neigungs-Winkel beeder Kreisflächen ist gleich dem Neigungs-Winkel zwey ihrer auf der Durchschnits-Linie senkrechter Diameter, oder auch irgend zwey anderer mit diesen parallelen Linien, die also auf der Durchschnits-Linie senkrecht sind.

§. 7. Schneidet eine dritte Kreisfläche die Kugel so, daß allen dreyen dieselbe Durchschnits-Linie gemein sey, so theilen sie die Kugel in 6 Spalten, wovon je zwey und zwey entgegengesetzte gleich sind: Unter denselben Umständen theilen 4 größte Kreise die Kugel in 8 Spalten, und so weiter.

§. 8. Schneidet die dritte Kreisfläche die Durchschnits-Linie der ersteren, so theilt sie die Kugel in 8 pyramidenförmige Körper, deren drey Seitenflächen Sektoren der drey schneidenden Kreise sind; die Kanten dieser Körper sind die Durchschnits-Linien der drey schneidenden Kreisebenen, und Halbmesser der Kugel, also einander gleich.

§. 9. Sind die erste und die zweyte Kreisfläche rechtwinklicht auf einander, und die dritte rechtwinklicht auf beeden, so ist die Durchschnits-Linie je zweyer Kreise die Axe der dritten, und die 8 pyramidenförmigen Körper sind ein ander gleich und ähnlich. Ihre

Seitenflächen sind Quadranten; ihre Neigungs-Winkel sind rechte Winkel.

§. 10. Sind der erste und der zweyte Kreis nicht senkrecht auf einander, der dritte aber senkrecht auf beeden; so halbirt dieser dritte Kreis die ungleichen Spalten, welche die ersten bilden, und theilt die Kugel in 8 Pyramiden, wovon je vier einander gleich und ähnlich sind.

§. 11. Die zwischen den ersten und den zweyten Kreis fallenden Bögen des dritten Kreises sind das Maafs des Neigungs-Winkels des ersten und zweyten. Jeder dieser Körper hat zwey Seitenflächen, die Quadranten sind, und zwey rechte Winkel. In vier derselben ist die dritte Seite stumpf, in den vier übrigen ist sie spiz. Die Summe je zwey aneinander liegender Körper der eine mit spizer, der andere mit stumpfer Seite ist der vierte Theil der Kugel.

§. 12. Ist der dritte Kreis nur auf einem der beeden ersteren senkrecht, so zerfällt die Kugel in 8 Pyramidenförmige Körper, von denen nur je zwey diametraliter entgegengesetzte gleich und ähnlich sind. Jeder dieser Körper hat einen rechten Winkel.

§. 13. Ist die dritte Kreisfläche auf keiner der beeden ersteren senkrecht, so hat keiner einen rechten Winkel.

§. 14. Abstrahiret man bey der Betrachtung dieser Körper von ihrer Solidität, und von jenem Theile ihrer Oberfläche, welcher ein Segment der Oberfläche der Kugel ist; betrachtet man also blos die ebenen drey

Sektoren, welche die übrige Oberfläche bilden, und ihre Neigung gegen einander, so hat man die Vorstellung eines Kugel-Dreyekes.

§. 15. Die Seitenflächen des Kugel-Dreyekes sind Sektoren dreier Kreise von gleichen Durchmesser. Man kann sie also in dieselbe Kreisebene legen, wenn man sich vorstellt, daß zwey Seitenflächen um ihre Durchschnits-Linien mit der dritten beweglich seyen.

§. 16. Es seyen drey Kreissektoren (*Fig. 1.*) ACB , BCD , DCE . Um die Radien BC und DC seyen die Sektoren ACB und DCE beweglich. Erheben sich diese zwey Sektoren über die Ebene des Papiers, so werden sich die Punkte A und E nähern, und endlich zusammenfallen. Die dann ebenfalls zusammenfallenden Radien CA , CE werden dann die dritte Kante des Kugel-Dreyekes bilden, dessen 3 Seiten die Sektoren sind.

§. 17. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich folgende Lehrsätze:

Imo Kein Neigungs-Winkel zweyer Seitenflächen kann zwey rechten Winkeln gleich seyn; denn sonst wären beede in derselben Ebene.

II do Also ist die Summe der drey Winkel nothwendiger Weise kleiner als 6 rechte Winkel.

III tio Die Summe der drey Seiten ist kleiner als die ganze Kreisfläche, aus der sie geschnitten sind, denn konnte sie der ganzen Kreisfläche gleich seyn, so wäre die Summe der Winkel gleich 6 rechten Winkeln.

IVdo Die Summe zweyer Seiten ist grösser als die dritte, denn gesetzt $ACB + DCE$ wäre kleiner als BCD , so könnten die Punkte A und E , die Radien CA und CE nie zusammenfallen. Gesezt es wäre $ACB + DCE = BCD$, so fielen A und E in der Fläche BCD zusammen.

Vto Es kann also keine Seite eines Kugel-Dreyekes der halben Kreisfläche gleich seyn.

VIto Die Summe der drey Neigungs-Winkel eines Kugel-Dreyeks ist grösser als zwey rechte Winkel.

Beweis dieses Satzes. Es wird in meinen Elementen erwiesen, daß der Neigungs-Winkel zweyer Ebenen ein *Maximum* sey. Da aber dieses Werk nicht gedruckt ist, so wird obiger Lehrsatz durch folgenden Beweis ersetzt.

Aus den Sehnen AB , BD , DE construire man das Sehnen-Dreyek BDI ; dieses hat, wie alle übrigen 180° zur Summe der 3 Winkel.

Nun ist jeder der drey Winkel, wie HDI , kleiner als der anliegende Neigungs-Winkel der Flächen BCD und DCE .

Man ziehe EF senkrecht auf CD und verlängere sie bis sie die Sehne BD in H schneidet. Man ziehe HI .

Bey der Zusammlegung bilden die auf CD (die Durchschnits-Linie) senkrechten Linien FE und FH den Neigungs-Winkel, und da die Punkte E und I zusammenfallen, so ist dann HI die Distanz der Punkte E und H . Die Linien EF , FH , und HI bilden also ein

Dreyek, dessen Spitze in F liegt; während die Spitze des Sehnen-Dreyekes in D ist.

Nun ist HF kleiner als HD , FE kleiner als $DE = DI$; die Linie HI ist aber beeden Dreyeken gemein, also ist der Neigungs-Winkel in F grösser als der Sehnen-Winkel in D .

Man mache $HL = HF$; $IL = EF$, so ist HLI der Neigungs-Winkel, und offenbar HLI grösser als HDI .

Eben so beweiset man, daß der Neigungs-Winkel der übrigen Seiten grösser sey, als der anliegende Sehnen-Winkel, und also die Summe aller drey Neigungs-Winkel grösser, als die Summe der 3 Winkel des Sehnen-Dreyeks, und folglich grösser als zwey rechte sey.

§. 18. Wenn von den zusammenfallenden Punkten A und E (*Fig. 2.*) auf die Ebene des Papiers ein Senkel herabgelassen wird, so trifft er einen Punkt, denn wir immer durch F bezeichnen wollen. Er kann innerhalb oder ausserhalb der Grundfläche des Dreyekes, niemals aber ausser, oder in der Periferie des Grundkreises liegen, von dem die 3 Dreyeksflächen Sektoren sind. — Die senkrechte Linie selbst nennt man die Höhe des Dreyekes; sie ist mit der Axe der Grund-Kreisfläche parallel. Sind die zwey Seitenflächen Quadranten, so ist sie die Axe selbst; dann fällt F mit dem Centrum zusammen.

§. 19. Man ziehe AH senkrecht auf BC (*Fig. 2.*), so ist $AH = \sin. ACB$; Eben so sey $EG = \sin. DCE$; da nun DCB niemals zwey rechten Winkeln gleich seyn

kann, so schneiden sich diese Linien, oder ihre Fortsetzungen in irgend einem Punkte F , und dieser ist auch der Senkelpunkt; denn er mufs in den Kreisebenen liegen, welche die Linien AH und EG bey ihrer Umdrehung um die Durchschnits-Linien CB und CD beschreiben, und zugleich auch in der Grundfläche BCD . Da nun AK und EL die Durchmesser dieser Kreisflächen sind, so liegt er in ihrem Durchschnittpunkte F .

§. 20. Das Verhältnifs der Linien AH und EG zur Höhe des Dreyekes bestimmt die Grösse der Sinuse der ihnen anliegenden Neigungs-Winkel. Es ist also leicht die Höhe, und die Neigungs-Winkel zu construiren. Auf AK errichte man in F eine senkrechte FS ; mache $HT = HA$; so ist FT die Höhe, und FHT der Neigungs-Winkel der beeden anliegenden Seiten. Errichtet man auf EL in F eine senkrechte FP , und macht man $FR = FT$, so ist RGF der Neigungs-Winkel der ihm anliegenden Seiten, und $GR = GE$.

Anmerkung. Den Beweis seze ich als bekannt voraus, da er in der Elementar-Geometrie gelehrt wird.

§. 21. Auch das Verhältnifs von AH zu HF bestimmt die Grösse des anliegenden Winkels. Beziehet man die Linien FH und FG auf die Höhe $FT = FR$, so erkennet man, dafs der Neigungs-Winkel desto grösser sey, je näher der Punkt F der Durchschnits-Linie liegt. Ist also FG kleiner als FH , so ist der Neigungs-Winkel FGR grösser als der Neigungs-Winkel FHT ; und man erkennt, dafs immer der grössere Winkel der grösseren Seite gegenüber, der kleinere derselben anliegt.

§. 21. Man seze $FG = 0$, das ist, man seze es fallen F und G zusamm, so ist $EG = FR = FT$, und somit ist der Sinus der Seite DCE die Höhe des Dreyekes; also ist DCE senkrecht auf BCD . Dieser Fall ist in der 3ten Figur construïret.

In der 4ten Figur fällt F in die Fortsetzung der Linie $AG = \text{Sin } ACB$ und in die Linie EH dem Sinus der Seite DCE selbst; also ist der dieser Seite anliegende Winkel grösser als ein rechter, und somit ein stumpfer Winkel.

Aus demselben Grunde ist einleuchtend, daß in der 5ten Figur der der Seite ACB anliegende Winkel stumpf sey, weil F in AG dem Sinus der Seite ACB liegt; dagegen ist der der Seite DCE anliegende Winkel spiz, weil F in der Fortsetzung der Linie EH , des Sinus der Seite DCE liegt.

In der 6ten Figur liegt F sowohl in EH , dem Sinus der Seite DCE , als in AG , dem Sinus der Seite ACB ; also sind die beeden anliegenden Winkel stumpf.

Kann man also mit den gegebenen Grössen ein Dreyek construïren, so zeigt immer die Lage des Punktes F an, ob irgend eine der gesuchten Grössen spiz oder stumpf sey.

Bestimmender Saz. Die sphärische Trigonometrie lehrt das Dreyek berechnen und construïren, wenn von den drey Winkeln und drey Seiten desselben, also von dieser 6 Grössen drey gegeben sind.

Von den Rechtwinklichten Dreyeken.

§. 23. Wenn zwey Seiten eines Dreyekes auf einander rechtwinklicht stehen, so nennt man ein solches Dreyek ein rechtwinklichtes; der Neigungs-Winkel derselben ist ein rechter Winkel. Die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, nennt man die Hypothenuse. Wir bezeichnen sie durch H . Die beeden anderen, die den rechten Winkel einschliessen, nennt man Catheten. Wir bezeichnen sie durch A und B . Den Neigungs-Winkel, welcher der Cathete A gegenüber, der Cathete B anliegt, nennen wir α , den anderen β .

§. 24. Es sey die 7te Figur ein aus einander gelegtes rechtwinklichtes Dreyek. $ACB = H$, $BCD = B$; $ECD = A$. Man ziehe EF senkrecht auf CD , so ist EF die Höhe des Dreyekes, und bey der Zusammlegung ist E senkrecht ober F .

Mit diesem Punkte E muß der Punkt A zusammenfallen. Es kommt also auch A senkrecht ober F zu liegen. Ist nun AG senkrecht auf CB in G , und man zieht GF , so ist auch GF in G senkrecht auf CB , und somit AF eine gerade Linie deren Segmente GA und GF bey der Zusammlegung die Schenkel des Neigungs-Winkels sind, welcher der Seite A gegenüber, und der Cathete B anliegt. Dieser Winkel α ist also durch das Verhältniß $AG: EF$ bestimmt, und es ist $\text{Sin } \alpha = \frac{\text{Sin } A}{\text{Sin } H}$,

also im allgemeinen

$$1. \text{ Sin } H = \text{Sin } \alpha : \text{Sin } A.$$

$$1. \text{ Sin } H = \text{Sin } \beta : \text{Sin } B, \text{ das ist.}$$

Imo Der Radius verhält sich zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus eines Winkels zum Sinus der ihm gegenüberliegenden Cathete.

§. 25. Mittels dieser Proportion findet man durch eine leichte Rechnung 1) eine Cathete, wenn die Hypothenuse und der der Cathete gegenüber liegende Winkel gegeben sind; 2) die Hypothenuse, wenn eine Cathete, und ein ihr gegenüber liegender Winkel gegeben sind; 3) den gegenübergelegenen Winkel, wenn die Hypothenuse und eine Cathete gegeben sind. Allein, da die durch die Rechnung gefundenen Sinus der gesuchten Grössen sowohl zu spizen, als zu stumpfen Winkeln und Seiten gehören, so weifs man doch nicht, ob die gesuchte Grösse spiz oder stumpf sey. Dieses weiset die *Construkzion* aus.

§. 26. Es seyen die gegebenen Grössen H und α . Es sind vier verschiedene Fälle möglich:

1. H spiz, α spiz.

3. H spiz, α stumpf.

2. H stumpf, α spiz.

4. H stumpf, α stumpf.

Erinnerung. Da das Dreyek rechtwinklicht ist, so liegt F immer in der Durchschnitts-Linie der Catheten.

1ter Fall. H spiz, α spiz. (*Fig. 7.*)

Es sey $ACB = A$, $AG = \sin H$. Man verlängere AG , und construire auf AL in G einen Winkel $LGP = \alpha$. Auf dem Schenkel PG nemme man $GH = GA$. Von H ziehe man eine senkrechte auf AL . Sie bestimmt den Punkt F . Man ziehe CF , und verlängere sie bis an die Periferie in D . In F errichte man auf

CD eine senkrechte EF , und verlängere sie bis an die Periferie, so ist $ECD = A$, $BCD = B$.

Man ziehe $BR = \sin B$, und nemme $BS = AG$, so ist $BSR = \sin \beta$. Alle gesuchten Grössen sind spiz.

2ter Fall. H stumpf, α spiz. (Fig. 8.)

Es sey $ACB = H$, $AG = \sin H$. Auf GL der Verlängerung von AG construire man in G einen Winkel $PGL = \alpha$: Nemme auf dem Schenkel PG , $GH = GA$, und ziehe HF auf GL senkrecht, so ist F bestimmt.

Man ziehe CD durch F , und in F erreichte man auf CD eine senkrechte, die man bis an die Periferie in E verlängert, so ist $ECD = A$, $BCD = B$; A ist spiz, B stumpf, β stumpf.

3ter Fall. H spiz. α stumpf. (Fig. 9.)

Da α stumpf ist, so liegt F im Sinus der gegebenen Hypothenuse. Es sey also $ACB = H$, $AG = \sin A$. Auf AG construire man in G einen Winkel $PGA = 180^\circ - \alpha$; nemme $GH = GA$. Von H ziehe man eine senkrechte auf AG , so ist F bestimmt.

Durch C und F ziehe man CD , und auf CD errichte man in F eine senkrechte, so ist $ECD = A$, $BCD = B$; beide stumpf, β stumpf.

4ter Fall. H und α stumpf. (Fig. 10.)

Es sey $ACB = H$, $AG = \sin H$; und da α stumpf ist, so liegt F in der Linie AG . Man construire also auf AG in G einen Winkel $PGA = 180^\circ - \alpha$; Auf dem Schenkel PG nemme man $GH = GA$, und

ziehe vom Punkte H eine senkrechte auf AG , so ist F bestimmt.

Durch C und F ziehe man FD . In F errichte man eine senkrechte auf ED , so ist $ECD = A$, stumpf; $BCD = B$ spiz, β spiz.

Anmerkung. Aus diesen Construkzionen ergibt sich, 1) daß wenn der gegebene Winkel α spiz ist, auch die demselben gegenüberliegende Seite spiz, ist er stumpf, auch die Seite stumpf sey, und daß also in jedem rechtwinklichten Dreycke, die Winkel und die ihnen gegenüberliegenden Catheten gleichartig seyen.

2) Sind die gegebenen Grössen, nemlich H und α gleichartig, das ist beede spiz, oder beede stumpf, so ist B , und somit auch β spiz. Sind sie ungleichartig, so sind B und β stumpf.

§. 27. Durch das Verhältniß §. 24. kann das Dreyeck bestimmt werden, wenn eine Cathete und die Hypothenuse gegeben sind. Allein auch folgendes Verhältniß dient hiezu.

In der 7ten Figur ist: $CF = \cos A$, und somit $CG = \cos A \cdot \cos B$. Es ist aber auch $CG = \cos H$, also ist $\cos H = \cos A \cdot \cos B$, oder

I: $\cos A = \cos B : \cos H$, das ist:

II. Der Radius ist zum Cosinus einer Cathete, wie der Cosinus der anderen Cathete zum Cosinus der Hypothenuse.

§. 28. Die Construkzionen sind verschieden, je nachdem die gegebenen Grössen gleichartig, oder ungleichartig sind.

1ter Fall. H und B spiz. (*Fig. 7.*)

Es sey $ACB = H$, $BCD = B$. Man ziehe AG , und verlängere sie bis sie die Linie CD in F schneidet. Auf CD erreichte man in F eine senkrechte, und verlängere sie bis an die Periferie in E , so ist $ACB = A$ spiz, α und β sind spiz.

2ter Fall. H stumpf, B spiz. (*Fig. 10.*)

Man verlängere CB und CD rückwärts bis an die Periferie; ziehe $AG = \sin H$. Die verlängerte CD schneidet AG in F . In F erreichte man auf DE eine senkrechte. Sie schneidet den Kreis in E , und es ist $ECD = A$ stumpf, α stumpf, β spiz.

3ter Fall. H spiz, B stumpf. (*Fig. 9.*)

Man verlängere CD wie oben. Sie schneidet die AG in F . In F errichte man auf CF eine senkrechte; Sie schneidet den Kreis in E , und es ist $ECD = A$ stumpf; α stumpf, β stumpf.

4ter Fall. H und B stumpf. (*Fig. 8.*)

Die verlängerte AG schneidet CD in F . Auf CD errichte man eine senkrechte in F . Sie schneidet den Kreis in E , und es ist $ECD = A$ spiz, α spiz, β stumpf.

Erinnerung. Aus obigen Konstruktionen erhellet, daß wenn die gegebenen Grössen gleichartig sind, die zweyte gesuchte Cathete spiz sey. Wenn aber die gegebenen Grössen ungleichartig sind, so ist die gesuchte Cathete stumpf.

§. 29. Sind die Catheten gegeben, so ist es eben so leicht die Hypothenuse nach allen 4 Fällen zu construiren.

1ter Fall. A und B spiz. (Fig. 7.)

Der Punkt F wird auf CD durch $EF = \sin A$ bestimmt. Von F aus ziehe man eine senkrechte auf CB , und verlängere sie bis sie den Kreis in A schneidet; so ist $ACB = H$ spiz. Die Winkel sind immer gleichartig mit den gegebenen Seiten.

2ter Fall. A spiz, B strumpf, (Fig. 8.)

Vom Punkte F ziehe man eine senkrechte auf der verlängerte CB , und verlängere diese senkrechte, bis sie den Kreis in A schneidet, so ist $ACB = H$ stumpf.

3ter Fall. A stumpf, B spiz. (Fig. 10.)

Der Punkt F liegt in der verlängerten CD . Von F ziehe man eine senkrechte auf die verlängerte CB , und verlängere diese senkrechte rückwärts bis an den Kreis in A , so ist $ACB = H$ stumpf.

4ter Fall. A und B stumpf. (Fig. 9.)

Der Punkt F liegt in der verlängerten CD . Von F ziehe man eine senkrechte auf CB , und verlängere sie rückwärts bis an den Kreis in A , so ist $ACB = H$.

Erinnerung. Wenn demnach die gegebenen Catheten gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spiz; wenn sie ungleichartig sind, so ist die Hypothenuse stumpf.

§. 30. Es sey in der 1ten Figur $ACB = A$, $BCD = B$, $DCE = H$.

Man ziehe FK senkrecht auf CA , so ist $FK = \sin A \cdot \cos A$; $CK = \cos^2 A$. Man nemme $CX = CK$, und in X errichte man eine senkrechte auf CE , so ist $RX = EX \cot A = \sin A^2 \cot H$; $ER = \frac{\sin A^2}{\sin H}$, also

$GR = EG - ER = \frac{\sin^2 H - \sin^2 A}{\sin H}$, und da $\sin H = \frac{\sin A}{\sin \alpha}$ ist, so ist $GR = \sin H \cos \alpha^2$. Zieht man

von F eine senkrechte FL auf GH , so ist $GL = \sin H \cdot \cos \alpha^2$ und somit $GR = GL$.

Nun sind FK und XR die zwey Schenkel des Neigungs-Winkel β , dessen Spitze in den zusammenfallenden Linien AC und EC liegt. Diese Schenkel bilden mit FL ein in den zusammenfallenden Punkten G und R rechtwinklichtes Dreyek. Macht man also $FP = FK$, so ist $FPG = \beta$.

Bey der Zusammlegung steht FHG senkrecht auf der Grundfläche, E und H , R und L fallen zusamm; P , K und X sind ein gemeinschaftlicher Punkt der zusammenfallenden Linien AC und EC . FL steht in R und L auf der Hypothenuse DCE senkrecht.

§. 31. Dieses vorausgesetzt hat man: $FP: FL$ oder $\sin A \cdot \cos A: \sin H \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 \cdot \sin \beta$, und da $\sin H = \frac{\sin A}{\sin \alpha}$ ist. $\cos A: \cos \alpha = 1 \cdot \sin \beta$

oder

1. $\sin \beta = \cos A: \cos \alpha$. Das ist:

III. Der Radius ist zum Sinus eines Winkels, wie der Cosinus der anliegenden Cathete zum Cosinus des derselben gegen überliegenden Winkels.

Wenn demnach 1. zwey Winkel gegeben sind, so findet man die dem einen anliegende Cathete.

2. Wenn eine Cathete und der anliegende Winkel gegeben sind, so findet man den gegenüberliegenden Winkel.

3. Wenn eine Cathete und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so findet man den anliegenden Winkel.

§. 32. Die Construkzionen sind verschieden je nachdem die gegebenen Winkel gleich- oder ungleichartig sind.

1ter Fall. α und β spiz. (*Fig. 11.*)

Man ziehe eine gerade Linie UV . Auf derselben nemme man einen beliebigen Punkt F . In F und auf UV errichte man eine senkrechte FH von arbiträrer Länge. In H construire man einen Winkel $= 90 - \alpha$, so bestimmt der zweyte Schenkel den Punkt G der Linie UV . In dem Punkte G errichte man eine senkrechte auf UV .

Man ziehe FL senkrecht auf GH . In F construire man auf FL den Winkel $LFP = 90 - \beta$.

Auf UV nemme man $GE = GH$; $GR = GL$. Von R mit dem Radius $RX = LP$ beschreibe man einen Kreis, und ziehe von E aus eine Tangente nach derselben. Diese Tangente schneidet die auf UF in G senkrechte DT in einem Punkte C .

Man ziehe CE , und mit dieser Linie als Radius beschreibe man von C aus einen Kreis.

Man ziehe den Radius CB durch F ; Auf CB in F errichte man eine senkrechte, und verlängere sie bis an die Periferie, so ist $ACB = A$, $BCD = B$, $DCE = H$; alle sind spiz.

2ter Fall. α und β stumpf. (*Fig. 12*)

Man nemme einen beliebigen Punkt F auf der Linie UV ; und es sey FH senkrecht auf derselben. In H construire man einen Winkel $= \alpha - 90$, so ist G bestimmt. DT sey in G senkrecht auf UV . Man ziehe FL senkrecht auf GH ; In F construire man auf FL den Winkel $LFP = \beta - 90$.

Man mache $GR = GL$; $GE = GH$. In R mit $RX = PL$ beschreibe man einen Kreis, und ziehe von E aus eine Tangente nach denselben. Sie schneidet die Linie DT in C .

Mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis; durch F und C ziehe man den Radius CB , und auf dieser Linie in F eine bis an die Periferie verlängerte senkrechte; so ist $ACB = A$; $BCD = B$, $DCE = H$. A und B sind stumpf, und H spiz.

3ter und 4ter Fall. α spiz, β stumpf, und α stumpf, β spiz. (*Fig. 13.*)

Anf der Linie UV bestimme man wie in den vorigen Falle die Punkte F , G , H , und L , indem man $HGF = 180 - \alpha$, und somit α für stumpf annimmt. — Auf FL in F construire man einen Winkel $LFP = 90 - \beta$; so ist P bestimmt.

Man mache $GE = GH$, $GR = GL$, und mit $RX = PL$ beschreibe man einen Kreis. Zu diesem ziehe man von E eine Tangente. Sie schneidet die auf UV in G senkrechte GD in C . Mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis, und verfare wie zuvor, so ist $ACB = A$ stumpf, $BCD = B$ spiz, $DCE = H$ stumpf.

Erinnerung. Wenn also die Winkel gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spiz, sind sie ungleichartig, so ist die Hypothenuse stumpf.

§, 33. Es ist in Figur 11. $GL: LP = \cot \alpha: \cot \beta$.

Nun ist: $GL = \sin H \cdot \cos^2 \alpha$, $KC = CX = \cos^2 A$; also $EX = \sin^2 A$, und $RX = LP = EX \cot H = \sin^2 A \cdot \frac{\cos H}{\sin H} = \sin^2 H \cdot \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos H}{\sin H} =$

$\sin H \sin^2 \alpha \cos H$.

also:

$GL: LP = \sin H \cdot \cos^2 \alpha: \sin H \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos H = \cot \alpha: \cot \beta$.

oder $\cot \alpha: \cos H = 1: \cot \beta$

oder endlich $1: \cos H = \tan \alpha: \cot \beta$,

das ist:

IV. Der Radius verhält sich zum Cosinus der Hypothenuse, wie die Tangente eines Winkels zur Cotangente des anderen.

§. 34. Dieses Verhältniß führet auf eine sehr leichte Construktion des Dreykes, wann die Winkel gegeben sind. Man beschreibe (*Fig. 14.*) einen Kreis, und auf einem Diameter LP desselben errichte man in Centrum einen senkrechten Radius CD . In D construire man

einen Winkel $\equiv 90 - \alpha$, so ist $KC \equiv \cot \alpha$. — Auf KC in K construiren man einen Winkel $\equiv 90 - \beta$, so ist $CG \equiv \cot \alpha \cdot \cot \beta \equiv \cos H$.

Auf CG errichte man in G eine senkrechte, und verlängere sie bis an den Kreis in E , so ist $DCE \equiv H$.

Man verlängere EG ; Auf KG errichte man in G eine senkrechte, und nemme auf dieser $GH \equiv GE$. Von H fälle man eine senkrechte auf die verlängerte EG , so ist F bestimmt, und $HGF \equiv \beta$. Man ziehe BC durch F ; und auf CB errichte man in F eine senkrechte. Sie schneidet den Kreis in A , und es ist $ACB \equiv B$, $BCD \equiv A$.

1te Erinnerung. Die 3 übrigen Fälle sind ebenfalls leicht zu construiren, wenn man sich dabey erinnert:

1. Dafs die Hypothenuse spiz sey, wenn die Winkeln gleichartig, stumpf sey, wenn sie ungleichartig sind.

2. Dafs der Winkel, und die ihnen gegenüberliegenden Seiten immer gleichartig seyen.

2te Erinnerung. Auch das Verhältnifs §, 31.

$$1. \cos A \equiv \sin \beta : \cos \alpha$$

gibt eine leichte und bequeme Construktion. Man betrachte α als die Hypothenuse eines Dreyekes, dessen Catheten A und das Complement von β sind. Es sey (Fig. 7.) $ACB \equiv \alpha$, $BCD \equiv 90^\circ - \beta$, so ist $CF \equiv \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \equiv \cos A$; Da man nun eine Seite, und den ihr

gegenüberliegenden Winkel α hat, so hat man alles übrige. In der Praktik wird man immer die zweyte und

auch diese Construktions-Art vorziehen, weil bey grossen Winkeln der Punkt S , welcher den Punkt E bestimmt, zu weit hinausfällt.

Es ist auch folgende Construktions-Art sehr bequem.

Es sey (*Fig. 14.*) $aCb = \alpha$, $bCd = 90 - \beta$, so ist $Ce = \cos \alpha$, $Cg = \sin \beta$. Mit dem Radius Cg durchschneide man ae in p , und ziehe Cl , so ist $bCl = A$, denn es ist $Cp : Ce = \sin \beta : \cos \alpha = 1 : Cf = 1 : \cos A$.

Man verlängere lf . Auf Cb nemme man $fr = fl$. Zum Punkte r ziehe man rs mit Cd paralell, und mache $st = sr$. Vom Punkte f mit dem Radius ft durchschneide man den Kreis in h , ziehe fh , und Ck auf fh senkrecht, so ist $bck = B$, $kch = H$.

Dem Geometer müssen verschiedene Construktions-Methoden bekannt seyn, damit er für jeden Fall die bequemste wählen könne.

§. 35. Es sey (*Fig. 15.*) $BCD = B$, $DCE = H$; $DQ = \text{Tang } B$, $DS = \text{Tang } H$, der Winkel $FGH = \alpha$. Errichtet man in Q eine senkrechte auf QD und zieht DR mit GH paralell, so ist $QDR = FGH = \alpha$. Bey der Zusammlegung des Dreyekes stehet QR senkrecht in Q auf QC ; und da der Punkt S ebenfalls senkrecht ober Q liegt, so fallen DR und DS zusamm, und es ist somit $DR = DS$, da nun $DR = \frac{QD}{\cos \alpha}$ ist, so ist $\frac{\text{Tang } B}{\cos \alpha} = \text{Tang } H$, oder $\text{Tang } H \cos \alpha = \text{Tang } B$, folglich:
1. $\text{Tang } H = \cos \alpha : \text{Tang } B$, das ist.

V. Der Radius verhält sich zur Tangente der Hypothenuse wie der Cosinus eines Winkels zur Tangente der demselben anliegenden Cathete.

§. 36. Es ist (Fig. 15.) $FG = CF$. $\sin B = \cos A$. $\sin B = FH$. $\cot FGH = \sin A$. $\cot \alpha$; also ist $\cos A \cdot \sin B = \sin A \cdot \cot \alpha$; somit $\sin B \cdot \tan \alpha = \tan A$.

also ist 1. $\sin B = \tan \alpha : \tan A$,
1. $\sin A = \tan \beta ; \tan B$ das ist

VI. Der Radius verhält sich zum Sinus einer Cathete, wie die Tangente des anliegenden Winkels zur Tangente der demselben gegenüberliegenden Cathete.

§. 37. Durch diese beiden Verhältnisse findet man die Tangente der zweyten Cathete, wenn eine Cathete, und der anliegende Winkel gegeben sind, oder auch die Hypethenuse. Die Construktion ist mannigfältig.

1ter Fall. B und α spiz. (Fig. 15.)

Es sey $BCD = B$; $QD = \tan B$, $QDR = \alpha$;
 $DR = \frac{QD}{\cos \alpha} = \frac{\tan B}{\cos \alpha}$. Man verlängere QD und mache
 $DS = DR$, und ziehe CS , so ist $DCS = H$.

2te Construktion. Auf einer unbestimmten UV , nemme man einen Punkt F , und auf demselben errichte man eine senkrechte FH von arbiträrer Grösse. — In H construire man einen Winkel $FHG = 90 - \alpha$, so ist G bestimmt. In G errichte man eine senkrechte DT . — In F construire man auf GF einen Winkel $GFX = 90 - B$. Der Schenkel FX schneidet die senkrechte DT in einen Punkte C . — Auf UV nemme man $GE = GH$; Ziehe CE und mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis, so ist $DCE = H$, und spiz. Auch sind A und β spiz.

2ter Fall. B spiz, α stumpf. (Fig. 16.)

Man construire wie im ersten Falle, allein man mache $QDR = 180 - \alpha$; und trage DR nach B zu auf die verlängerte DQ . Durch F und S ziehe man SE , so ist $DCE = F$; B und D sind stumpf, β spiz.

3ter Fall. B stumpf, α spiz. (Fig. 17.)

Es sey $BCD = B$. Man verlängere BC nach b , und ziehe $QD = \text{Tang } B$. Man mache $QDR = \alpha$, und trage DR nach S . Man ziehe den Radius CE durch S und C , so ist $DCE = H$ stumpf.

4ter Fall. B und α stumpf. (Fig. 17.)

Man operire wie zuvor, aber mache $QDR = 180 - \alpha$, und trage DR nach DS' ; so ist, wenn man CS' zieht, $DCE = H$ und spiz.

1te Erinnerung. Auch bey diesen Construkzionen ist also H spiz, wenn die gegebenen Grössen gleichartig, stumpf, wenn sie ungleichartig sind.

2te Erinnerung. Die obige Construkzions-Methode wird oft unbequem, wenn der Winkel (α) groß ist, weil dann die Tangente und Secante sehr groß sind, dann wird folgende Construkzions-Methode zweckmässiger.

Man ziehe (Fig. 15.) eine gerade Linie UV , und nemme auf derselben einen beliebigen Punkt F an.

In F construire man einen Winkel $XFV = 90^\circ - B$, und auf dem Schenkel FX nemme man FC von beliebiger Grösse.

Von C ziehe man auf FV eine senkrechte und in G , wo diese senkrechte die Linie FV schneidet, construire man einen Winkel $HGF = \alpha$.

Auf UV errichte man in F eine senkrechte, so ist die Linie GH bestimmt.

Auf FV nemme man $GE = GH$, und ziehe CE . Mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis, verlängere CF bis an die Periferie in B . Auf CB errichte man in F eine senkrechte, und verlängere sie bis an die Periferie, so ist $ACB = A$, $ECD = H$, denn es ist $AF = CF \sin B \tan \alpha$, und somit $\frac{AF}{CF} = \cot A =$

$\sin B \tan \alpha$.

Ist α stumpf, und B spiz, so ist $180 - ACF$ die Cathete A , $180 - ECD = H$.

Ist B stumpf, α spiz, so nemme man auf einer Linie UV einen Punkt F an, und construire einen Winkel $UFC = B - 90$. CF sey von beliebiger Grösse; durch C ziehe man auf UV die senkrechte Dd . In G construire man einen Winkel $HGF = \alpha$, und in F errichte man auf UV eine senkrechte, so ist H bestimmt. — Auf UV nemme man $GE = GH$, und mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis.

Man ziehe CE , und verlängere CF bis an die Periferie in B . Auf CB errichte man in F eine senkrechte, und verlängere sie bis an die Periferie in A , so ist $ACB = A$, $ECD = H$; folglich A spiz, H stumpf.

Ist B stumpf, α stumpf, so ist $A = 180 - ACB$, $H = 180 - ECD$, also A stumpf, H spiz.

§. 38. Wenn eine Cathete, und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind, so sind nur zwey Fälle möglich, nemlich beede Grössen müssen entweder spiz, oder stumpf seyn. Kein spizer Winkel kann in einem rechtwinklichten Dreyeke einer stumpfen Cathete, kein stumpfer Winkel einer spizen Cathete gegenüber liegen.

1ter Fall. A und α spiz. (Fig. 18.)

Es sey $ACB = A$; $AF = \sin A$. Durch C und F lege man einen Diameter BR , und verlängere denselben. Man mache $FH = FA$. In H construire man einen Winkel $FHg = 90 - \alpha$, und verlängere FA unbestimmt. Auf dieser Verlängerung nemme man $gl = Hg$, und von F mit dem Radius Fl beschreibe man einen Kreis. Man findet, daß er den ersten Kreis nicht schneide; also ist kein Dreyek möglich; und man erkennt, daß Fl kleiner als FR seyn müsse.

Ist $Fl = FR$, so sind augenscheinlich B und D Quadranten. Da α vorhin zu klein war, so sey $FHG = 90 - \alpha$, und $GL = GH$, dann schneidet der Kreis vom Radius FL den ersten in den Punkten E und e , und es sind somit zwey Dreyeke möglich.

Man ziehe FE , und von C auf FE eine senkrechte CD , so ist $DCE = H$, $BCD = B$ beede spiz.

Man ziehe Fe , und von C eine senkrechte CP' auf Ce . Die senkrechte verlängere man bis an die Periferie in d , so ist $dCe = H$, $BCd = B$; beede sind stumpf.

2ter Fall. A und α stumpf. (Fig. 19.)

Es sey $ACB = A$; $AF = \sin A$. Durch C und F lege man einen Diameter, und verlängere ihn unbe-

stimmt. Auf dieser Verlängerung nemme man $FH = FA$, und construire $FHG = \alpha - 90$, so ist G auf der Fortsetzung von AF bestimmt. Man mache $GL = GH$, und von F mit dem Radius $FL = GH - GF$ beschreibe man einen Kreis.

Wäre FL kleiner als FR , so berührte dieser Kreis den ersten in keinen Punkte. Ist aber FL grösser als FR , so schneidet er den ersten in 2 Punkten E und e , also sind zwey Dreyeke möglich.

Man ziehe FE und auf diese CD in P senkrecht, so ist $ECD = H$ stumpf, $BCD = B$ spiz.

Man ziehe Fe , und von C eine senkrechte Cd auf Fe , so ist $eCd = H$ spiz, $BCd = B$ stumpf.

Ist $FL = FR$, so sind B und H Quadranten.

Von den schiefwinklichten Dreyeken.

§. 39. Schiefwinklicht nennt man die Dreyeke, wo keine Seite auf der anderen senkrecht ist.

§. 40. Es seyen (*Fig. 20.*) zwey rechtwinklichte Dreyeke, deren Hypothenusen ACB , und LCM seyen. Es seyen ferner die Catheten DCE und ICK gleich; und somit $EF = IO$: Sie sind also gleich hoch. Man lege sie zusamm, und seze sie mit ihrer gleichen und senkrechten Cathete an einander, so entstehet ein schiefwinklichtes Dreyek, dessen Seiten die Hypothenusen der rechtwinklichten Dreyeke, die Grundfläche die Summe ihrer Grundflächen ist. Diesemnach fallen CA , und CM zusamm, und werden eine Kante des neuen Dreyekes. Eben so fallen die Punkte F und O , und somit CD und

CK zusamm. Die gleichen Catheten DCE , KCI bilden eine Vertikalfläche, in welcher die zusammenfallenden Senkelpunkte F und O , und die Höhe $EF = IO$ liegen.

Die den Catheten BCD , KCL gegenüberliegenden Winkel bilden zusamm den Neigungs-Winkel der Seiten ACB und LCM ; die beiden anderen Winkel bleiben wie zuvor.

§. 41. Die 2te Figur stellt das neuentstandene Dreyek vor. A , H , P , M , sind senkrecht ober F und O zusammenfallende Punkte. T , Y , U , Z fallen in den zusammenfallenden Linien CA , CM zusamm. RU fällt in ST , VZ in XY , GS in GR ; NV in NX ; und es ist $FU = OZ = FQ = OQ'$ (Fig. 20.)

Die Bezeichnung bleibt unveränderlich folgende: die eine Seite $ACB = A$; die andere $MCL = B$; die Grundfläche $KCL = D$. Das der Seite A anliegende Segment $BCD = M$; das der Seite B anliegende Segment der Grundfläche $= R$, also $D = M + R$.

Der der Seite B anliegende, der Seite A gegenüberliegende Winkel $FNP = \alpha$; der der Seite A anliegende, der Seite B gegenüberliegende Winkel $FGH = \beta$. Der der Seite D gegenüberliegende, oder der Neigungswinkel der Seiten A und $C = \Delta$. Der Neigungswinkel der Seite A gegen die Vertikalfläche, der Winkel $FUR = \mu$; der Neigungswinkel der Seite B gegen die Vertikalfläche $FZV = \epsilon$; also ist $\Delta = \mu + \epsilon$.

Erinnerung. Ein schiefwinklichtes Dreyek kann auch dadurch entstehen, daß man von einem rechtwinklichten Dreyeke ein rechtwinklichtes abschneidet, dann

bleibt alles wie zuvor; Nur D wird $M - R$, oder $R - M$; $\Delta = \mu - \epsilon$ oder $\epsilon - \mu$, je nachdem der Schnitt auf der Seite A oder auf der Seite B geschieht.

§. 42. Unter diesen Voraussetzungen ist $FH = \sin A \sin \beta$; $FP = \sin B \sin \alpha$; und da $FH = FP$, so ist $\sin A \sin \beta = \sin B \sin \alpha$. Auf eben dieselbe Art findet man, wenn man A zur Grundfläche macht:

$$\sin B \sin \Delta = \sin D \sin \beta. \text{ Man hat also } \sin A : \sin \alpha = \sin B : \sin \beta = \sin D : \sin \Delta, \text{ und somit}$$

$$\frac{\sin A}{\sin \alpha} = \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin D}{\sin \Delta} \text{ das ist}$$

die Sinus der Winkel verhalten sich wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Seiten.

Erinnerung. Es ist also auch Componendo:

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B = \sin \alpha + \sin \beta : \sin \alpha - \sin \beta.$$

und $(\sin A + \sin B) \cdot \sin \Delta = (\sin \alpha + \sin \beta) \cdot \sin D.$

§. 43. Wenn demnach zwey Seiten und ein gegenüberliegender Winkel, oder zwey Winkel und eine gegenüberliegende Seite gegeben sind, so kann das Dreyek leicht berechnet werden, allein man bleibt ungewiss, ob die gesuchten Grössen spiz oder stumpf seyen. Man sucht dieser Ungewissheit, die oft grofs Irrungen veranlasset, auf mancherley Weiee abzuhefen; Die Konstruktion hebt alle Zweydeutigkeiten. Es seyen zwey Winkel α und β , und die dem Winkel α gegenüberliegende Seite A gegeben.

Man hat 8 Fälle zu beobachten:

- | | |
|---|---|
| 1. A , α und β spiz. | 3. A spiz, α stumpf, β spiz. |
| 2. A und α spiz, β stumpf. | 4. A spiz, α und β stumpf. |

5. A stumpf, α und β spiz. 7. A stumpf, α stumpf, β spiz.
 6. A stumpf, α spiz, β stumpf. 8. A , α und β stumpf.

1ter Fall. A , α und β spiz. (Fig. 22.)

Es sey $ACB = A$, $AG = \sin A$. Auf der verlängerten AG construire man in G einen Winkel $= \beta$.
 Mache $GH = GA$, und von H ziehe man eine senkrechte, so ist F bestimmt. Auf der senkrechten FH construire man in H einen Winkel $= 90 - \alpha$; so bestimmt der 2te Schenkel den Punkt I .

Man nemme $IK = IH$, und von F mit einem Radius FK beschreibe man einen Kreis.

Berührt dieser Kreis den anderen gar nicht, so ist kein Dreyek möglich.

Berührt er ihn, so ist der Berührungs-Punkt R in der Fortsetzung von CF .

Schneidet er ihn so sind zwey Durchschnits-Punkte E und e .

Betrachten wir die construirte Figur mit Aufmerksamkeit, so sehen wir, daß bald ein, bald zwey, bald auch gar kein Dreyek möglich sey. Wir sehen nemlich:

1. Daß FK grösser als FH seyn müsse, denn wäre $FK = FH$, so wäre $\alpha = 90^\circ$; nun soll aber α spiz seyn.

2. Ist FK grösser als FH aber kleiner als FA , so ist nur ein Dreyek möglich, denn der zweyte Durchschnits-Punkt e fällt zwischen A und B , und somit wäre die Summe der 3 Seiten grösser als die ganze Kreisfläche. Wenn also α grösser als β ist, so ist nur ein Dreyek möglich.

3. Ist FK grösser als FA , kleiner als FR , so sind zwey Dreyeke möglich. Jeder der zwey Punkte E und e gibt ein Dreyek.

4. Ist $FK = FR$, so ist wider nur ein Dreyek möglich. Ist FK grösser als FR , so ist kein Berührungspunkt, also auch kein Dreyek möglich.

Um zu bestimmen, ob B und D spiz oder stumpf seyen, verlängere man EF bis an die Periferie in m ; und es ist einleuchtend, daß wenn m in der Linie FH liegt, D ein Quadrant, B spiz sey. Wenn also m jenseite FH gegen B liegt, so ist D und auch B spiz.

Liegt m zwischen FH und FS der verlängerten FR , so ist D stumpf, B spiz.

Liegt m in S , so ist D stumpf, B ein Quadrant.

Liegt m zwischen S und FK , so ist D , und auch B stumpf.

Man ziehe FE , und von C eine senkrechte CD auf FE . Da nun m zwischen FH und S liegt, so ist D stumpf, B spiz.

Man ziehe Fe , und auf diese die senkrechte Cd , so sind D und B stumpf.

Hieraus erkennt man demnach, daß wenn $CL = \cos B$ grösser ist als GF , also $\cos B$ grösser als $\sin A \cos \beta$, D und B spiz seyen; Ist aber $\cos B = \sin A \cos \beta$ so ist D ein Quadrant, B spiz. Ist $\cos B$ kleiner als $\sin A \cos \beta$, so ist D stumpf, B spiz. — Ist $\cos B = 0$, so ist B ein Quadrant, D stumpf; Liegt $\cos B$ auf der anderen Seite von RS , so ist B und auch D stumpf.

Das Segment $M = BCS$ ist in diesem Falle immer spiz, das Segment R kann nur dann ein Quadrant seyn, wenn CD senkrecht auf RS ist; dann ist auch B ein Quadrant. Ist also B stumpf, so ist auch R stumpf; also sind die Segmente gleichartig mit den Seiten, denen sie anliegen, und hier $D = M + R$.

Wir wissen zwar, daß die den Segmenten gegenüberliegenden Vertikal-Winkeln mit denselben gleichartig seyen; wenn also M und R spiz sind, so sind μ und ϵ auch spiz, aber $\mu + \epsilon$ kann stumpf seyn, wenn auch $M + R$ spiz ist. Wir finden hierüber keine Anweisung in unseren Lehrbüchern, allein man kann sich zurecht finden, wenn man aus §. 31. sich erinnert, daß wenn Δ ein rechter Winkel sey: $\cos \alpha = \cos A \cdot \sin \beta$. Wenn $\cos A \cdot \sin \beta$ grösser ist, als $\cos \alpha$, so ist Δ spiz, im entgegengesetzten Falle aber Δ stumpf. Dieses wird noch deutlicher bey der Construktion der Dreyecke aus 3 gegebenen Winkeln nachgewiesen werden.

2ter Fall. A spiz, α spiz; β stumpf. (Fig. 23.)

Es sey $ACB = A$; $AG = \sin A$. Da β stumpf ist, so liegt F im Sinus der anliegenden Seite A . Es sey also $AGH = 180 - \beta$. Hat man $GH = GA$ genommen, und durch eine senkrechte F bestimmt, so construiren man auf FH im Punkte H einen Winkel $= 90 - \alpha$, so ist I bestimmt. Mit dem Radius $FK = HI + FI$ beschreibe man einen Kreis. Durch F und C lege man den Diameter SR .

Es kann FK nicht $= FH$ seyn, sonst wäre $\alpha = 90$. Ist FK grösser als FH kleiner als $FP = AG + FG$, so hat man zwey Durchschnits-Punkte, aber nur der

Punkt e , zwischen R und A gilt ein Dreyek. Der Punkt E fällt zwischen B und P , und gäbe $D = 0$ und kleiner als Null, welches unmöglich ist.

Ist FK grösser als FP , so sind zwey Dreyeke möglich. Ist $FK = FR$, so ist R der Berührungs-Punkt, und es ist nur ein Dreyek möglich.

Fällt m zwischen S und A , so sind B und D spiz.

Fällt m in S so ist B ein Quadrant, D spiz.

Fällt m zwischen S und FH , so ist B stumpf, D spiz.

Fällt m in FH , so ist B stumpf, und D ein Quadrant.

Fällt m zwischen FH und P , so sind B und D stumpf.

Man ziehe FE und auf selbe die senkrechte CD , so sind B und D spiz. — Man ziehe Fe , und auf Fe die senkrechte Cd , so hat man B stumpf, D spiz.

D ist gleich $R - M = DCS - BCS$. M ist immer spiz; R ist ein Quadrant, wenn CD auf SR senkrecht ist; fällt D näher an R so ist das Segment R stumpf.

Endlich ist $\Delta = \varrho - \mu$. Wenn Δ stumpf, oder spiz sey, weiß man aus dem, was beim 1ten Falle gesagt wurde.

3ter Fall. A spiz, α stumpf, β spiz. (Fig. 24.)

Da A und β spiz sind, so liegt F in der Verlängerung des Sinus der Seite A ; und da α stumpf ist, so liegt auch F im Sinus der Seite B selbst. — Es sey

$AG = \sin A$, und F auf der Verlängerung von AG , wie gewöhnlich bestimmt.

Auf FH in H construire man einen Winkel $= \alpha - 90^\circ$, so ist HI bestimmt. Man nemme $IK = IH$, und mit $FK = HI - FI$ beschreibe man einen Kreis, so hat man zwey Durchschnits-Punkte E und e , von denen der letzte kein Dreyek geben kann, weil dann die Summe aller 3 Seiten grösser wäre als die ganze Kreisfläche.

Damit nun der Punkt E ein Dreyek gebe, so muß FK grösser als FP seyn, denn wäre $FK = FE = FP$, so wäre die Seite A gleich der Summe der beeden anderen, die Radien CD und C fielen zusamm, und $D = o$.

Ferner muß FK kleiner seyn, als FH , denn wäre $FK = FE = FH$, so wäre $\alpha = 90^\circ$, und wäre spiz, wenn FK grösser als FH wäre.

Es erhellet demnach, daß nur ein Dreyek möglich sey, in dem B und D spiz sind. $FCB = FCD$, oder $M = R = D$. M und R sind spiz.

4ter Fall. A spiz, α und β stumpf. (Fig. 25.)

Da beede Winkel stumpf sind, so liegt F im Durchschnits-Punkte der Seiten A und B . Auf $AG = \sin A$ werde F durch der Winkel $HGA = 180^\circ - \beta$ bestimmt. Es sey $FHI = 90^\circ - \alpha$; $IK = HI$. Mit dem Radius $FK = HI - FI$ beschreibe man einen Kreis. Der Punkt e gibt kein Dreyek.

Man ziehe FE , und von C falle man auf dieselbe die senkrechte CD ; so ist $BCD = D$, $DCL = B$, beide sind stumpf.

Es ist einleuchtend dafs FK grösser seyn müßte als FA , denn wäre sie gleich FA , so wäre die Summe der 3 Seiten der ganzen Kreisfläche gleich; wäre $FK = FH$, so wäre $\alpha = 90^\circ$. Wäre FH grösser als FK , so wäre α spiz.

Es ist also nur ein Dreyek möglich.

Man verlängere FC nach R , so ist $BCR = M$ stumpf, $RCD = R$ spiz, und $D = M + R$.

5ter Fall. A stumpf, α und β spiz.

Der Punkt F liegt demnach in der Verlängerung von AG oder $\sin A$, und in der Verlängerung von $\sin B$. Man bestimme wie zuvor F und I durch die gegebenen Grössen, und mit $FK = FI + HI$ beschreibe man einen Kreis, der Punkt e gibt kein Dreyek. Man ziehe FE , und auf diese die senkrechte CD , so ist $ECD = B$ spiz, $BCD = D$ stumpf.

Es muß FE kleiner als FA , grösser als FH seyn.

Ferner ist $FCB = M$ stumpf. $FCD = R$ spiz, und $D = M + R$.

6ter Fall. A stumpf, α spiz, α stumpf.

Es liegt demnach F in AG , und in der Verlängerung des Sinus der Seite B . Man bestimme F und I durch die gegebenen Grössen. Mit $FK = FI + HI$ beschreibe man einen Kreis ..., Man sieht, dafs e kein Dreyek geben könne. Man ziehe EF und auf dieselbe die senkrechte CL ; Man verlängere sie rückwärts bis an die

Periferie in D , so ist $BCD = D$ spiz; $DCE = B$ stumpf.

Man sieht, daß FE grösser als FH , kleiner als FP seyn müsse; denn sonst wäre im ersten Falle $\alpha = 90^\circ$, im 2ten wäre $D = 0$.

Man verlängere CF nach R' , so ist $BDR = M$, $DCR' = R$; und $D = M - R$, M und R spiz.

7ter Fall. A und α stumpf, β spiz. (Fig. 28.)

Der Punkt F liegt demnach in der Fortsetzung von AG , und im Sinus der Seite B . Man bestimme F und I , und mit $FK = HI - FI$ beschreibe man einen Kreis. In diesem Falle sind zwey Dreyeke möglich, aber nur dann, wenn $FK = FE$ grösser als FR , und kleiner als FP ist. Ist $FE = FP$, oder grösser als FP , so ist nur ein Dreyek möglich. — Doch muß immer FE kleiner als FH seyn, sonst wäre $\alpha = 90^\circ$.

Fällt E in P , so ist $D = 0$. Cd und CB fallen in einander.

Fällt E zwischen P und R , so ist D spiz, B stumpf.

Fällt E in R , so ist D spiz, B ein Quadrant,

Fällt E zwischen R und HF , so ist D spiz, B spiz.

Fällt E in HF , so ist D ein Quadrant, B spiz.

Fällt E jenseits HF , so ist D stumpf, B spiz.

In den zwey Dreyeken der Figur ist in dem ersten $ABDE$, D stumpf, B spiz. Im 2ten $ABde$, ist D spiz, B stumpf.

Endlich ist $D = M - R = FCB - Fcd$, oder $FBC - FCD$. M ist immer stumpf; R ist spiz, wenn E zwischen R und A liegt. Liegt B in R , so ist R ein Quadrant.

8ter Fall. A , α und β stumpf. (Fig. 29.)

Da beede Winkel stumpf sind, so liegt F im Sinus der beeden Seiten. Man bestimme also auf AG den Punkt F durch den Winkel $HGA = 180^\circ - \beta$, und den Punkt I durch den Winkel $FHI = \alpha - 90$. Mit $FK = HI - FI$ beschreibe man einen Kreis, und man sieht, daß wenn $FK = FE = Fe$ grösser als FK , kleiner als FA ist, zwey Dreyeke möglich seyen. Ist FK grösser als FA , kleiner als FK , so ist nur ein Dreyek möglich. Wäre $FK = FH$, so wäre α ein rechter Winkel.

Fällt E zwischen A und R , so ist D stumpf, B spiz.

Fällt E in R , so ist D stumpf, B ein Quadrant.

Fällt E zwischen R und FH , so ist D stumpf, B stumpf.

Fällt E in FH , so ist D ein Quadrant, B stumpf.

Fällt E jenseits FH , so ist D spiz, B stumpf.

In dem Dreyeke $ABDE$ der Figur ist $BCD = D$ stumpf, $DCE = B$ spiz. — Im Dreyeke $ABde$ ist $BCd = D$ stumpf, $dCe = B$ stumpf.

Man verlängere CF nach S , so ist $BCS = M$, SCD oder $SCd = R$. M ist immer spiz. R ist stumpf im ersten, spiz im zweyten Dreyeke, und $D = M \pm R$.

Anmerkung. Um den praktischen Gebrauch dieser Formeln und Construktionen zu zeigen, ist es nüt-

lich dem Leser ein Rechnungs-Schema vorzulegen; und dann einige Erinnerungen beyzusezen.

Es sey ACB (Fig. 27.) $= A = 125^\circ$, $\beta = 121^\circ$, $\alpha = 80^\circ$.

Dieses ist demnach der 6te Fall, und somit ist B stumpf, D spiz $= M - R$. Nun ist $\sin B = \frac{\sin A \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha}$.

$$\log \sin A = \log \sin 125^\circ = \log \sin 55^\circ = 9,9133645.$$

$$\log \sin \beta = \log \sin 121^\circ = \log \sin 59^\circ = 9,9330656.$$

$$\text{Compl. log } \sin \alpha = \text{Comp. log } \sin 80^\circ = 0,0066485.$$

$$\log \sin B \dots \dots \dots = 9,8530786.$$

$$\text{also } B = 134^\circ, 31' 19''$$

Man suche die Segmente M und R aus der Analogie §, 35.

$$\text{Tang } M = \text{Tang } A \cdot \cos \alpha. \quad \text{Tang } R = \text{Tang } B \cdot \cos \alpha.$$

$$l. \text{Tang } 55^\circ = 0,1547732. \quad l. \text{Tang } 45^\circ, 28', 41'' = 0,0072476.$$

$$+ l. \cos 59^\circ = 9,7118393. \quad + l. \cos 80^\circ \dots \dots = 9,2396702.$$

$$l. \text{Tang } M = 9,8666125. \quad l. \text{Tang } R = 9,2469178.$$

$$\text{also } M = 36^\circ, 20', 10''. \quad R = 10^\circ, 00', 48''. \quad M - R = D = 26^\circ, 19' 22'', 9.$$

Man suche die Vertikal-Winkel aus der Analogie §. 31.

$$\cos \mu = \cos M \cdot \sin \beta. \quad \cos \varrho = \cos R \cdot \sin \alpha.$$

$$\log \cos M = 9,9060940. \quad \log \cos R = 9,9933337$$

$$+ \log \sin \beta = 9,9330656. \quad + \log \sin \alpha = 9,9933515.$$

$$\log \cos \mu = 9,8391596. \quad \log \cos \varrho = 9,9866852.$$

$$\text{also } \mu = 46^\circ, 19' 51'', \quad \varrho = 14^\circ, 06, 55'', \quad \mu - \varrho = \Delta = 32^\circ, 12' 56''.$$

2ter Rechnungsmuster. Es sey $A = 127^\circ$, $\beta = 66^\circ$, $\alpha = 125^\circ$, also A und α stumpf, und β spiz.

Dieses ist der siebente Fall. Sucht man die Seite B , so weifs man nicht, ob sie spiz oder stumpf sey; ob nur ein Dreyek oder zwey möglich seyen etc. oder ob gar keines möglich sey. Dieses kann eigentlich nur durch eine etwas mühesame Rechnung ausgemittelt werden, aus welcher sich ergibt, ob FK grösser oder kleiner sey als FP oder $\sin B \cdot (1 - \cos \alpha)$ grösser oder kleiner sey, als $\sin A \cdot (1 - \cos \beta)$.

Im ersten Falle ist nur ein Dreyek, im 3ten sind 2 Dreyeke möglich.

Nun ist $\log \sin 62^\circ 57' 30'' \cdot \sin^2 27^\circ 39' = 9,2785255$; und $\log \sin 53^\circ \cdot \sin^2 33^\circ = 9,3745662$, also sind 2 Dreyeke möglich. In dem einem, welches durch E bestimmt wird, ist B spiz, D stumpf; in dem andern ist B stumpf und D spiz. Hier folgt die Berechnung:

$$\log \sin A = \log \sin 53^\circ = 9,9023486.$$

$$\log \sin \beta = \log \sin 66^\circ = 9,9607392.$$

$$\text{Comp. } \log \sin \alpha = \text{Comp. } l. \sin 55^\circ = 0,0866355.$$

$$\log \sin B \dots = 9,9497143.$$

also ist B in dem einen Dreyeke $= 62^\circ 57' 25''$, in dem andern $= 117^\circ 2' 35''$. D ist immer $= M - R$. M ist immer stumpf. R ist mit B gleichartig.

$$\log \tan 53^\circ = 0,1228856. \parallel \log \tan B = 0,2920278.$$

$$\log \cos 66^\circ = 9,6093133. \parallel \log \cos 55^\circ = 9,7585913.$$

$$\log \tan M = 9,7321989. \parallel \log \tan R = 0,0506191.$$

also $M = 151^\circ 38' 30''$, $R = 131^\circ 40' 7''$ oder $48^\circ 19' 53''$, folglich im Dreyeke E ist, $D = M - R =$

$151^{\circ}, 38', 30'' - 48^{\circ}, 19', 53'' = 103^{\circ}, 18', 37''$. Im Dreyeke C ist $D = 151^{\circ}, 38', 30'' - 131^{\circ}, 40', 17'' = 19^{\circ}, 58', 23''$.

Note. Hätte man bey der Berechnung dieses Dreyekes die Construktion nicht vor Augen gehabt, so hätte man blos im Finsternen getappet, und man hätte nicht gewußt, ob man um D zu bestimmen, die Segmente addiren, oder sie von einander abziehen solle; Ob nur ein oder zwey Dreyeke möglich seyen, läßt sich aus unsern bisherigen Formeln gar nicht bestimmen. Sie führen uns sogar öfters irre. In der ersten Rechnungs-Aufgabe ist B stumpf, α spiz, also $Tang\ B$ negativ, $Cos\ \alpha$ positiv, folglich $Tang\ R$ negativ, und somit R stumpf. Es ist aber gezeigt worden, daß R spiz sey; daraus daß R stumpf ist, würde man gefolgert haben, daß auch ϵ stumpf sey. Da ferner A und β stumpf sind, so wäre $Tang\ A$, $Cos\ \beta$ positiv, und also M und auch μ positiv, folglich wäre $\mu - \epsilon = 46^{\circ}, 19', 50'' - 165^{\circ}, 53', 17'' = \Delta$.

Unsere Handbücher geben uns manchmale unrichtige Weisungen; so sagt Vega B , R , ϵ und D seyen in diesem Falle unbestimmt. Wir haben gesehen, daß sie bestimmt seyen.

§. 44. Sind A und B nebst einem entgegengesetzten Winkel β gegeben, so findet man α durch dasselbe direkte Verhältniß, durch welches vorhin B gefunden wurde. Die Construktion ist der vorigen sehr ähnlich, und man hat wider 8 verschiedene Fälle.

1ter Fall. A , B und β spiz. (Fig. 30.)

D

Es sey $ACB = A$, und F durch A und β auf der Verlängerung der Linie AG bestimmt. Da $\sin B$ gegeben ist, so werden die Punkte I und K durch diese Grösse bestimmt, und $HI = IK = \sin B$ genommen. Mit FK wird ein Kreis beschrieben, welcher die Punkte E und e bestimmt. Beide Punkte geben Dreyeke. Man ziehe FE , und auf diese CD senkrecht, so ist $BCD = B$, und α spiz, weil F in der Verlängerung von $EL = HI = IK = \sin DCE = \sin B$ liegt.

Man ziehe Fe und verlängere sie bis an die Peripherie in e' ; auf ee' fälle man die senkrechte Cd , so ist $BCd = D$, und α stumpf. Ist $FK = FR$, so ist kein Dreyek möglich, E und R fielen zusammen, und B wäre ein Quadrant, welches der Voraussetzung widerspricht.

Ist FK kleiner als FR , so ist nur ein Dreyek möglich; der Durchschnits-Punkt e gäbe kein Dreyek, weil Cd jenseits CB oder zwischen CA und CB fiele, also kein D möglich wäre. Ist aber FK kleiner als AF , so sind zwey Dreyeke möglich. Wäre $FK = FH$, so wäre α ein rechter Winkel, und es kann also FK nicht kleiner als FH genommen werden. Es sey $Fh = FH$.

Liegt e zwischen A und h , so ist α stumpf, D spiz.

Liegt e in h , so ist $\alpha = 90^\circ$, D spiz.

Liegt e zwischen h und FH , so ist α spiz, D spiz.

Liegt e in FH , so ist α spiz, D ein Quadrant.

Liegt e zwischen FH und S , so ist α spiz, D stumpf.

Liegt e in S , so ist kein Dreyek möglich, denn B wäre ein Quadrant.

Die Grundfläche $D = M + R$, wenn α spiz ist, $D = M - R$ wenn α stumpf ist. $\Delta = \mu + \epsilon$; ist $\Delta = \mu - \epsilon$, so ist Δ spiz; Ist $\Delta = \mu + \epsilon$, so kann Δ spiz oder stumpf seyn.

In dem Falle, wo Δ spiz oder stumpf seyn kann, erkennt man aus der 6ten Analogie §. 36, welches von beeden statt habe. Ist nemlich $\sin A. \tan \beta$ grösser als $\tan B$, so ist Δ spiz; ist $\sin A. \tan \beta$ kleiner als $\tan B$, so ist Δ stumpf. Allein es ist auch um Mißgriffe zu verhüten eine Erinnerung nothwendig. Die Gleichung $\sin A. \tan \beta = \tan B$ gibt den Werth von B für den Fall an, wo $\Delta = 90^\circ$. Man kennt also die Grösse der Seite B für diesen Fall; ist nun die gegebene Seite B grösser, so ist Δ spiz, ist sie kleiner, so ist Δ stumpf. So ist es auch mit der Gleichung $\cos A. \sin \beta = \cos \alpha$, §. 43. 1ter Fall. Sie gibt den Werth von $\cos \alpha$, wenn $\Delta = 90$, ist der Winkel α grösser, so ist Δ spiz, ist er kleiner, so ist α stumpf. Daran halte man sich, die gegebenen Grössen mögen spiz oder stumpf seyn, denn sonst führet die Veränderung der Zeichen leicht irre.

2ter Fall. A und B spiz, β stumpf. (Fig. 31.)

Der Punkt F liegt in AG , weil β stumpf ist. Es sey also $FGH = 180 - \beta$, $HI = \sin B$, $FK = FI + HI$.

Mit FK beschreibe man einen Kreis, so hat man zwey Durchschnits-Punkte E und e . Der Punkt e gibt kein Dreyek; also ist nur ein Dreyek möglich; auch ist FK kleiner als FR , dann wäre $FK = FR$, so wäre B ein Quadrant; Auch muß FK grösser als FP seyn,

dann wäre $FK = FP$, so fielen CD und CB zusammen, und D wäre $= o$. In dem möglichen Dreycke sind α und D spiz, $D = R - M$; Δ spiz.

3ter Fall. A spiz, B stumpf, β spiz. (Fig. 32.)

Der Punkt F liegt in der Verlängerung von AG , weil β spiz ist. Es sey $HGF = \beta$; $HI = IK = \sin B$. Der Kreis vom Radius FK gibt E und e ; Man sieht, daß e kein Dreyek gebe.

Wäre $FK = FR$, so wäre B ein Quadrant. Es muß also FK kleiner als FR , grösser als FA seyn.

In dem einzig möglichen Dreycke ist α spiz, D stumpf. $D = M + R$. M ist spiz, R stumpf, Δ stumpf.

4ter Fall. A spiz, B und β stumpf. (Fig. 31.)

Die Construktion ist dieselbe, wie im 2ten Falle. Die stumpfen B liegen zwischen R und A , wie die spizen zwischen R und B . Die Construktion zeigt, daß jeder Punkt der Periferie zwischen R und A ein Dreyek gebe.

Fällt e zwischen R und H' in die verlängerte FH , so ist α spiz und D spiz.

Fällt e in H' , so ist α spiz, D ein Quadrant.

Man nemme $Fh = FH$. Fällt e zwischen H' und h , so ist α spiz, D stumpf.

Fällt e in h , so ist α ein rechter Winkel und D stumpf.

Fällt e zwischen h und A , so ist α stumpf und D stumpf.

D ist $= M + R$, wenn α stumpf ist; $D = M - R$, wenn α spiz ist, M ist stumpf. R ist spiz.

5ter Fall. A stumpf, B und β spiz. (Fig. 33.)

Der Punkt F liegt in der Verlängerung von AG . Es sey $HI = \sin B$; $FK = HI - FI$. Der Kreis vom Radius FK bestimmt die Sehnen EE' , und ee' . Der Punkt e , der zwischen R und P liegt, gibt immer B stumpf. Der Punkt E , der die spizen B gibt, liegt zwischen R und A .

Liegt E zwischen R und FH , so ist α stumpf, D spiz.

Liegt E in FH , so ist α stumpf, D ein Quadrant. — Es sey $Fh = FH$.

Liegt E zwischen FH und h , so ist α stumpf, und D stumpf.

Liegt E in h , so ist α ein rechter Winkel, D stumpf.

Liegt E zwischen h und A , so ist α spiz, D stumpf.

$D = M - R$, wenn α stumpf ist, $D = M + R$, wenn α spiz ist, M ist immer stumpf, R spiz.

6ter Fall. A stumpf, B spiz, β stumpf. (Fig. 34.)

Der Punkt F liegt demnach im Sinus AG ; Es sey $FK = HI - FI$. Dieser Radius bestimmt die Punkte E und e . Läge E in R , so wäre B ein Quadrant. Läge E weiter nach b zu, so wäre B stumpf. Es liegen demnach die Spizen B zwischen R und A .

Es sind also α und D stumpf, $D = M + R$; M ist spiz, R ist stumpf.

7ter Fall. A und B stumpf, β spiz.

Der Punkt e , der die Lage der stumpfen B bestimmt, liegt zwischen R und P ; Es ist demnach α stumpf, D spiz. $D = M - R$. M ist stumpf, R ist stumpf.

8ter Fall. A , B , und β stumpf. (Fig. 34.)

Die stumpfen B werden durch den Punkt e bestimmt.

Liegt e zwischen R und FH , so ist α stumpf und D stumpf.

Liegt e in FH , so ist α stumpf, D ein Quadrant.

Liegt e zwischen FH und h , (wenn $FH = Fh$), so ist α stumpf, D spiz.

Liegt e in h , so ist α ein rechter Winkel, D spiz.

Liegt e zwischen h und P , so ist α spiz, und D spiz.

$D = M + R$, wenn α stumpf ist; $D = M - R$, wenn α spiz ist, M ist immer spiz, R ist gleicher Art.

Anmerkung. Das Rechnungs-Schema ist von den vorigen nur wenig unterschieden. Es ist nemlich $\sin \alpha = \frac{\sin A \cdot \sin \beta}{\sin B}$.

Es sey $A = 68^\circ$, $B = 115^\circ$, $\beta = 120^\circ$, also A spiz, B und β stumpf. Dieses ist der 4te Fall (Fig. 31.) Da B stumpf ist, so wird die Lage dieser Seite durch den Punkt e zwischen R und A bestimmt; und α kann spiz oder auch stumpf seyn, je nachdem e zwischen R und h , oder zwischen A und h liegt. Durch die Konstruktion ist der Punkt e sehr leicht zu bestimmen. Denn ist FK kleiner als FR , grösser als FH' , so liegt e zwischen R und h . Ist FK grösser als FR , so nemme man $FK = HI - FI$ zum Radius; ist dieser nun grösser als FR' , so fällt e zwischen A und h .

Die Lage des Punktes e läßt sich durch die Rechnung bestimmen, allein diese Rechnung ist etwas mühe-

sam; durch die Construktion findet man immer mit überflüssiger Genauigkeit die Lage des Punktes e . In unserer Aufgabe liegt ein e zwischen R und H , also ist α spiz, und D spiz.

Die Construktion zeigt ferner, daß $HI - FI$ grösser sey, als PA und FR , also liegt zwischen h und A ein Punkt e' , der ein Dreyek mit einem gleichen stumpfen B gibt. Es sind also zwey Dreyeke möglich, und in diesem letzteren sind α und D stumpf, das α in diesem ist das Supplement des ersteren. Im ersten ist $D = M - R$ spiz, im zweyten $D = M + R$ stumpf. M ist stumpf, R spiz.

Hier folgt die Berechnung:

$$\log. \sin 68^\circ = 9,9671659.$$

$$\log. \sin 120^\circ = 9,9375306.$$

$$\text{Comp } \log. \sin 115^\circ = 0,0427243.$$

$$\log. \sin \alpha = 9,9474208.$$

also α im einem Dreyeke $= 62^\circ, 22', 18''$, im anderen $= 117^\circ, 37', 42''$. Man berechne M und R .

$$\log. \text{Tang } A = 0,3935904.$$

$$\log. \text{Tang } B = 0,3313275.$$

$$\log. \cos \beta = 9,6989700.$$

$$\log. \cos \alpha = 9,6662691.$$

$$\log. \text{Tang } M = 0,0925604.$$

$$\log. \text{Tang } M = 9,9975966.$$

$$\text{Es ist also } M = 128^\circ, 56', 36''$$

$$+ R = 44^\circ, 50', 29''$$

$$D = 173^\circ, 47', 5'' \text{ oder } 84^\circ, 6', 7''.$$

Man wäre wohl durch die gewöhnlichen Rechnungs-Formeln zu denselben Resultaten gelanget, allein bey Berechnung des Segmentes R wäre man irre geführt worden; denn da B stumpf ist, α aber spiz und auch

stumpf seyn kann, so würde man geurtheilet haben, daß R stumpf sey, wenn α spiz ist; allein dieses wäre ein Irrthum; denn R ist immer spiz, α mag spiz oder stumpf seyn. Könnte, wenn α spiz ist, R stumpf und also $= 135^\circ, 9', 33''$, seyn, so wäre R grösser als M , und folglich M kleiner als nichts.

§. 45. Es ist (Fig. 21.) $CG = \cos A = CF, \cos M$; Auch $CN = \cos B = CF, \cos R$; also ist, $\cos A : \cos B = \cos M : \cos R$, das ist: die Cosinus der Segmente der Basis verhalten sich wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

§. 46. Durch Composition erhält man folgendes Verhältniß:

$$\cos M + \cos R : \cos M - \cos R = \cos A + \cos B : \cos A - \cos B; \text{ oder } \cot \frac{1}{2} (M + R) : \tan \frac{1}{2} (M - R) = \cot \frac{1}{2} (A + B) : \cot \frac{1}{2} (A - B).$$

Nun ist $D = M + R$. also hat man:

$$\tan \frac{1}{2} (M + R) = \cot \frac{1}{2} D. \tan \frac{1}{2} (A + B). \tan \frac{1}{2} (A - B).$$

§. 47. Wenn also die drey Seiten eines Dreyekes gegeben sind, so findet man die Segmente der Basis. Wir wollen demnach durch diese Formel unsere vorhinige Rechnung prüfen. Es ist im Dreyeke, wo α spiz ist: $A = 68, B = 115, D = M - R = 84^\circ, 6', 7''$, also $\frac{1}{2} (A + B) = 91^\circ, 30', \frac{1}{2} (A - B) = 23^\circ, 30'; \frac{1}{2} D = 42^\circ, 3', 3'', 5$ also:

$$\begin{array}{ll} l. \tan \frac{1}{2} (A + B) = 1,5819321 & \frac{1}{2} (M + R) = 86^\circ, 53', 26'', 5 \\ l. \tan \frac{1}{2} (A - B) = 9,6383019 & \frac{1}{2} (M - R) = 42^\circ, 23', 3'', 5 \\ \log \cot \frac{1}{2} D = 0,0448005 & M = 128^\circ, 56', 30'' \\ l. \tan \frac{1}{2} (M + R) = 1,2650345 & R = 44^\circ, 50', 23'' \end{array}$$

Hätte man das andere Dreyek berechnet, und somit $D = M + R$ gesetzt, so hätte man $\log \text{Tang} \frac{1}{2} (M - R)$ gefunden und dieselben Werthe für M und R erhalten; woraus also der gewöhnlichen Formel zuwider erhellet, daß R nie stumpf seyn könne, α mag spiz oder stumpf seyn.

§. 48. Es ist (Fig. 21.) $FG = CF \cdot \sin M$; $FN = CF \cdot \sin R$; Es ist auch $FG = FH \cdot \cot \beta$, $FN = FP \cdot \cot \alpha$. Da nun $FH = FP$ ist, so ist

$$\sin M : \sin R = \cot \beta : \cot \alpha.$$

Das ist: der Sinus der Segmente der Basis verhalten sich wie die Contangenten der anliegenden Winkel.

§. 49. Durch Zusammensetzung entsteht folgendes Verhältniß:

$$\sin M + \sin R : \sin M - R = \cot \beta + \cot \alpha : \cot \beta - \cot \alpha.$$

oder

$$\text{Tang} \frac{1}{2} (M + R) : \text{Tang} \frac{1}{2} (M - R) = \sin (\alpha + \beta) : \sin (\alpha - \beta).$$

$$\text{also: } \text{Tang} \frac{1}{2} (M + R) = \text{Tang} \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Wenn also eine Seite, und die ihr anliegenden zwey Winkel gegeben sind, so kann das Dreyek durch die Segmente bestimmt werden.

Anmerkung. Zum Rechnungs-Schema wollen wir die im ersten Exempel gegebenen, und gefundenen Gröſſen gebrauchen. Es ist $D = 26^\circ, 19', 22'', 77$; $\alpha = 80$, $\beta = 121$, also $\beta + \alpha = 201$, $\beta - \alpha = 41$; $\frac{D}{2} = 13^\circ, 9', 41'', 38$.

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} D = 9,3689169.$$

$$\log. \text{Sin } (\beta - \alpha) = 9,8169429.$$

$$\text{Comp. l. Sin } 21^\circ = 0,4456708.$$

$$1. \text{Tang} \frac{1}{2} (M + R) = 9,6315306, \text{ also: } \frac{M + R}{2} = 23^\circ, 10', 32''$$

$$\frac{1}{2} D = \frac{M - R}{2} = 13^\circ, 9', 41'' 38.$$

$$M = 36^\circ, 20', 13'' 38.$$

$$R = 10^\circ, 00', 50'' 62.$$

§. 50. Combiniret man die obige Gleichung §. 49, mit der §. 46., und elimiret aus beeden $\text{Tang } \frac{1}{2} (M + R)$, so findet man:

$$\text{Tang } \frac{1}{2} D = \sqrt{\frac{\text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) \cdot \text{Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Cot } \frac{1}{2} (A + B) \cdot \text{Sin } (\alpha - \beta)}}.$$

In dieser Gleichung ist D durch A , B , α und β ausgedruckt, und somit kann die dritte Seite direkt, und und ohne Berechnung und Summirung der Segmente gefunden werden. Wir werden in der Folge ein bequemes Rechnungs-Schema mittheilen.

§. 51. Wir wissen aus der 21ten Figur, daß $FU = FZ = FQ$ (Fig. 20.) $= OQ'$ sey. Ist nun FR auf HG ; FV auf PN senkrecht, so ist: $FR = FU \text{ Sin } \mu$; $FV = FZ \text{ Sin } \epsilon$, also

$$FR: FV =, \text{ Sin } \mu: \text{Sin } \epsilon.$$

Nun ist $FR = \text{Sin } A \cdot \text{Sin } \beta \cdot \text{Cos } \beta$; $FV = \text{Sin } B \cdot \text{Sin } \alpha \cdot \text{Cos } \alpha$.

Da nun $\text{Sin } A \text{ Sin } \beta = \text{Sin } B \text{ Sin } \alpha$, so ist

$$FR: FV = \text{Cos } \beta: \text{Cos } \alpha, \text{ folglich}$$

$$\text{Sin } \mu: \text{Sin } \epsilon = \text{Cos } \beta: \text{Cos } \alpha, \text{ das ist}$$

die Sinus der Vertikal-Winkel verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Winkel.

§. 52. Durch Zusammsetzung wird:

$$\sin \mu + \sin \epsilon : \sin \mu - \sin \epsilon = \cos \beta + \cos \alpha : \cos \beta - \cos \alpha,$$

oder $\text{Tang} \frac{\mu + \epsilon}{2} : \text{Tang} \frac{\mu - \epsilon}{2} = \text{Cot} \frac{\beta + \alpha}{2} : \text{Tang} \frac{\beta - \alpha}{2}$

Da nun $\Delta = \mu + \epsilon$ ist, so ist:

$$\text{Tang.} \frac{1}{2} (\mu + \epsilon) = \text{Tang.} \frac{1}{2} \Delta \cdot \frac{\text{Tang.} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\text{Cot.} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}.$$

Anmerkung. Wenn demnach die 3 Winkel gegeben, so findet man die Vertikal-Winkel; wie folgendes Rechnungs-Schema zeigt. Es sey, $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 121^\circ$, $\Delta = 32^\circ, 13'$, also: $\frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 100^\circ, 30'$; $\frac{1}{2} (\beta - \alpha) = 20^\circ, 30'$; $\frac{1}{2} \Delta = 16^\circ, 6', 30''$.

$$\log. \text{Tang} \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = 9,5727377.$$

$$\log. \text{Tang} \frac{1}{2} \Delta = 9,4605863.$$

$$\log. \text{Tang} \frac{1}{2} (\beta + \alpha) = 0,7320331.$$

$$\log. \text{Tang} \frac{1}{2} (\mu + \epsilon) = 9,7653571.$$

$$\text{also } \frac{1}{2} (\mu + \epsilon) = 30^\circ, 13', 30''.$$

$$\frac{1}{2} (\mu - \epsilon) = 16^\circ, 6', 30''.$$

$$\mu = 46^\circ, 20', 00''.$$

$$\epsilon = 14^\circ, 7', 00''.$$

NB. Es zeigt sich eine Differenz von $10''$, welche daher rühret, daß man die Proportional-Theile Negligirte, als man das erstere Exempel berechnete. In genauen Rechnungen müssen die Centesimal-Theile der Sekunden in Rechnung gebracht werden.

§. 53. Es ist $RU = FU \cdot \cos \mu$, $ZV = FZ \cdot \cos \epsilon$; und $FU = FZ$. (Fig. 21.).

Nun ist $RU = ST = \sin A \cos A \sin^2 \beta$; $ZV = XY = \sin B \cos B \sin^2 \alpha$. Substituirt man für $\sin^2 \beta$, $\frac{\sin^2 B \sin^2 \alpha}{\sin^2 A}$, und reduzirt, so hat man:

$RU: ZV = \cos A \sin B: \sin A \cos B = \cot A: \cot B$,
nach oben ist $RU: ZV = \cos \mu: \cos \epsilon$, also;

$\cos \mu: \cos \epsilon = \cot A: \cot B$; das ist
der Cosinus der Vertikal-Winkel verhalten sich, wie die
Cotangenten der anliegenden Seiten.

§. 54. Durch Zusammsezung erhält man:

$\cos \mu + \cos \epsilon: \cos \mu - \cos \epsilon = \cot A + \cot B: \cot A - \cot B$
oder;

$\cot \frac{1}{2}(\mu + \epsilon): \text{Tang } \frac{1}{2}(\mu - \epsilon) = \sin(A + B): \sin(A - B)$.
also; $\text{Tang } \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) = \cot \frac{1}{2} \Delta \cdot \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)}$.

Anmerkung. Sind demnach zwey Seiten, und der eingeschlossene Winkel gegeben, so findet man die Vertikal-Winkel. Zum Rechnungs-Exempel mögen die vorhinigen Daten gelten. Es sey $A = 125^\circ$, $B = 134^\circ, 31', 20''$, $\Delta = 32^\circ, 13'$. $A + B = 259^\circ, 31', 20''$. $A - B = 9^\circ, 31', 20''$. $\frac{1}{2} \Delta = 16^\circ, 16', 30''$.

$$\log. \cot \frac{1}{2} \Delta = 0,5394137.$$

$$\log. \sin(A - B) = 9,2186146.$$

$$\text{Comp. log. } \sin(A + B) - 180^\circ = 0,0073027.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) = 9,7653310.$$

$$\text{also: } \frac{1}{2}(\mu + \epsilon) = 30^\circ, 13', 20''.$$

$$\frac{1}{2}(\mu - \epsilon) = 16^\circ, 6', 30''.$$

$$\mu = 46^\circ, 19', 50''.$$

$$\epsilon = 14^\circ, 6', 50''.$$

§. 55. Combinirt man die so eben berechnete Formel mit der Formel §. 52., das ist eliminirt aus beiden $\text{Tang } \frac{1}{2} (\mu - \varrho)$, so findet man:

$$\text{Tang } \frac{1}{2} \Delta = \sqrt{\frac{\text{Cot } \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cdot \text{Sin } (A - B)}{\text{Tang } \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cdot \text{Sin } (A + B)}}.$$

Anmerkung. Aus dieser Formel, und aus der §. 50. lassen sich in einer zusammengezogenen Operation D und Δ bestimmen. Die gegebenen Daten sollen dieselben bleiben, und somit $A = 125^\circ$; $B = 134^\circ, 31', 20''$, $\alpha = 80^\circ$; $\beta = 121^\circ$; also

$$\begin{aligned} A + B - 180^\circ &= 79^\circ, 31' 20''; \quad \frac{1}{2} (A + B) = 129^\circ, 45', 40''; \\ B - A &= 9^\circ, 31', 20''; \quad \frac{1}{2} (B - A) = 4^\circ, 45', 40'', \quad \alpha + \beta - 180^\circ = 21^\circ, 0', 0''. \\ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) &= 100^\circ, 30', 0''; \quad \beta - \alpha = 41^\circ, 0', 0''; \quad \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = 20^\circ, 30' 0''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. \text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) &= 0,0798666. \\ + \log. \text{Tang } \frac{1}{2} (A - B) &= 8,9205869. \\ + \log. \text{Sin } (\alpha + \beta) &= 9,5543292. \\ + \text{Comp. log. Sin } (\beta + \alpha) &= 0,1830571. \end{aligned}$$

$$2 \log. \text{Tang } \frac{1}{2} D = 18,73788398.$$

$$\frac{1}{2} D = 13^\circ, 9', 45''.$$

$$\begin{aligned} \log. \text{Cot } \frac{1}{2} (\alpha + \beta) &= 9,2679669. \\ \log. \text{Cot } \frac{1}{2} (\alpha - \beta) &= 0,4272623. \\ \log. \text{Sin } (A - B) &= 9,2186146. \\ \text{Comp. log. Sin } (A + B) &= 0,0073027. \end{aligned}$$

$$2 \log. \text{Tang } \frac{1}{2} \Delta = 18,9211465.$$

$$\frac{1}{2} \Delta = 16^\circ, 6', 30''.$$

Note. Wenn man sich dieser Formeln bedient, so ist es leicht sich in Bestimmung der Tangente zu irren;

ausser dem dienen sie auch zur Controle der vorigen Formeln; aber sie sind etwas mühesam, und darum wird ihnen wohl jeder die viel bequemern Constructionen vorziehen.

§. 50. Nach §. 42. ist:

$$\text{Tang } \frac{1}{2}(A+B) : \text{Tang } \frac{1}{2}(A-B) = \sin \alpha + \sin \beta : \sin \alpha - \sin \beta.$$

Aus der Gleichung §. 50 entwikle man $\text{Tang } \frac{1}{2}(A+B)$, und substituïre, so hat man:

$$\text{Tang}^2 \frac{1}{2} D : \text{Tang}^2 \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} : \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

In der geradlinigten Trigonometrie werden folgende Analogien erwiesen:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Substituirt diese Werthe in der vorigen Gleichung, so hat man:

$$\text{Tang } \frac{1}{2}(A-B) = \text{Tang } \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Tang } \frac{1}{2}(A+B) = \text{Tang } \frac{1}{2} D \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Anmerkung. Sind demnach zwey Winkel, und die eingeschlossene Seite gegeben, so findet man durch diese Formeln die Summe und die Differenz der zwey übrigen Seiten, und somit diese Seiten selbst, wie folgendes Rechnungs-Exempel zeigt. Es sey $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 121^\circ$, $D = 26^\circ, 19', 30''$.

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} D = 9,3689199.$$

$$\log. \text{Sin } \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 9,5443253.$$

$$\text{Comp. log. Sin } \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 0,0073339.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} (B - A) = 8,9205791.$$

$$\frac{1}{2} (B - A) = 4^{\circ}, 45', 40''.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} D = 9,3689199.$$

$$\log. \text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = 9,9715876.$$

$$\text{Comp. log. Cos } \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = 0,7393670.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} (A + B) = 0,0798745.$$

$$\frac{1}{2} (A + B) = 129^{\circ}, 45', 40'', \text{ oder } 51^{\circ}, 14', 20''.$$

Es bleibt also ungewiss, ob die halbe Summe der unbekannten Seiten grösser oder kleiner als 90 Grade sey. Indessen ist zu bemerken, daß $\text{Cos } \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ negativ sey, und somit ist auch $\text{Tang } \frac{1}{2} (A + B)$ negativ, Die Construktion kann uns ohne weiterem zu recht weisen.

§. 57. Aufgabe. Die Grundfläche D , und die derselben anliegenden Winkel α und β sind gegeben. Man soll das Dreyek construiren.

Auflösung. Auch hier sind 8 Combinationen möglich, und jeder Fall muß untersucht werden.

1ter Fall. D , α und β spiz.

2ter Fall. D , α spiz, β stumpf.

3ter Fall. D spiz, α stumpf, β stumpf.

4ter Fall. D spiz, α und β stumpf.

5ter Fall. D stumpf, α und β spiz.

6ter Fall. D stumpf, α spiz, β stumpf.

7ter Fall. D stumpf, α stumpf. β spiz.

8ter Fall. D , α und β stumpf.

(Fig. 35.) 1ter Fall. D , α und β spiz.

Man construire einen Winkel $HFI = D$. Auf jedem der Schenkel errichte man im Durchschnits-Punkte eine senkrechte, und diese seyen FP , FR . Es sey ferner $FH = FI$ von beliebiger Grösse. In H und I construire man die Winkel $FIK = 90^\circ - \alpha$; $FHG = 90^\circ - \beta$; so sind die Punkte K und G bestimmt.

Auf FR in K , und auf FP in G errichte man zwey senkrechte, so schneiden sie sich in einem Punkte C , und sind die Schenkel der gegebenen Seite D .

Auf FR nemme man $KE = KI$, und mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis. Es schneidet die Linie FP in A . Man ziehe CA , CE , so ist $ACB = A$, $DCE = B$. Beide Seiten sind spiz. Der Winkel Δ kann spiz, oder stumpf seyn. Durch die Construktion ist dieses leicht auszumitteln; denn da man A und B construiert hat, so ziehe man DS , so ist $CS = \cos B$, und macht man $CS = CT$, und zieht TU senkrecht auf BC , so ist $CU = \cos A \cdot \cos B$. Wäre nun $\Delta = 90^\circ$, und somit D eine Hypothenuse, so wäre $\cos D = \cos A \cdot \cos B$; allein CU ist grösser als CV , also ist Δ stumpf. Dieses kann auch durch Rechnung und durch die Construktion des 14ten Figur bestimmt werden; denn nach derselben ist $\cos D = \cot \alpha \cdot \cot \beta$, wenn $\Delta = 90^\circ$ ist; Ist also $\cos D$ kleiner als $\cot \alpha \cdot \cot \beta$, also D grösser, so ist Δ stumpf; ist $\cos D$ grösser, also D kleiner, so ist Δ spiz.

(Fig. 36.) 5ter Fall. D stumpf, α und β spiz.

Man construire den Winkel $HFI = D$; $HF = FI$ sey von arbiträrer Grösse. In H und I construire man

die Winkel $FIK = 90 - \alpha$; $FHG = 90 - \beta$. Man errichte FP senkrecht auf FH , FR senkrecht auf FI , so sind die Punkte G und K bestimmt. Durch G ziehe man eine parallele mit FH , durch K eine parallele mit FI , so ist die erstere auch senkrecht auf FP , die 2te senkrecht auf FR , und beide schneiden sich in einem Punkte C .

Auf FP nemme man $GA = GH$, und mit dem Radius CA beschreibe man einen Kreis. Er schneidet die Linie FR in einem Punkte E . Zieht man CA , CE , so ist $ACB = A$, $DCE = B$.

Man sieht, daß die dem kleineren Winkel überliegende Seite immer spiz sey; aber die andere kann spiz oder stumpf seyn, je nachdem FE durchs Centrum C gehet, rechts oder links desselben liegt. Die Construktion läßt uns hierüber nicht lange im Zweifel. Will man aber diesen Fall durch Rechnung bestimmen, so sieht man, daß wenn man GC unbestimmt verlängert das Verhältniß von FL' zu FK bestimme, ob B spiz oder stumpf sey. Ist FL'' grösser, so ist R spiz; Ist $FL = FK$, so ist B ein Quadrant. Ist FL kleiner als FK , so ist B stumpf.

$$\text{Nun ist } FL = FG = \frac{\sin A \cdot \cos \beta}{\cos GFL}; FK = \sin B \cdot \cos \alpha,$$

also ist:

$$FL : FK = \frac{\sin A \cdot \cos \beta}{\sin B \cdot \cos \alpha} : \cos D = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta \cdot \cos \alpha}$$

$$\cos D = \tan \alpha \cdot \cot \beta : \cos D.$$

Die Berechnung ist also leicht.

Um zu bestimmen ob Δ spiz oder stumpf sey, hat man nebst der Construktion auch folgende Betrachtung. Wären A und B Catheten eines rechtwinklichten Dreyekes, α und β die denselben anliegenden Winkel, so hätte man $\cos D = \cos A \cdot \cos B = \cot \alpha \cdot \cot \beta$. Man weiß also wie groß D seyn müßte, damit $\Delta = 90^\circ$. Ist nun D grösser, so ist Δ stumpf, ist D kleiner, so ist Δ spiz.

In unserem Falle ist Δ immer stumpf; unsere gewöhnlichen Formeln hätten uns hier irregeführt; Wir werden sehen, daß
$$\cos \Delta = \frac{\cos D - \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

Nun ist D stumpf, A spiz, B kann spiz und auch stumpf seyn, also wäre
$$\cos \Delta = - \frac{\cos D + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

Wäre also B stumpf und $\cos A \cdot \cos B$ grösser als $\cos D$, so könnte $\cos \Delta$ spiz seyn. Dieses ist aber in unserem Falle nicht möglich.

2ter und 3ter Fall. (Fig 37.) D spiz $\begin{cases} \alpha \text{ stumpf, } \beta \text{ spiz.} \\ \alpha \text{ spiz, } \beta \text{ stumpf.} \end{cases}$

Man verfare wie zuvor, construire $HFI = D$, und ziehe die auf den Schenkeln senkrechten PF und RF ; $HF = FI$ von arbiträrer Länge. In H construire man einen Winkel $HFG = 90^\circ - \beta$, so ist G bestimmt. In I construire man in derselben Lage, das ist von der rechten zur linken den Winkel $FIE = \alpha - 90^\circ$, so ist K bestimmt. Die auf FR und FP in G und K senkrechten schneiden sich in einem Punkte C . Man nemme $GA = GH$, und mit CA beschreibe man einen Kreis. Er schneidet die Linie FP in E , und es ist $ACB = A$, $DCE = B$; Hier sind also A und B spiz. Allein man seze der Punkt

K rücke nach P , das ist der Winkel $PKI = \alpha$ werde grösser, so wird der Durchschnits-Punkt C nach G rücken, dann mit ihm zusammenfallen, und endlich unterhalb RF zu liegen kommen, je nachdem der Punkt K nach N , L , V rückt.

Man setze K sey in N , so ist C in G , AG ist der Radius, und also A ein Quadrant, B spiz.

Rückt K nach L , so ist A stumpf, B ein Quadrant.

Rückt K nach V , so sind A und B stumpf.

Die Construktion führt uns auf die Bestimmung durch die Rechnung, und zeigt uns, daß die gesuchten Seiten spiz oder stumpf seyen, je nachdem FS kleiner oder grösser ist als FG . Nun ist $FS = FK = \frac{\sin B \cdot \sin \alpha}{\cos RFP \cos D}$;

$$GF = \sin A \cdot \cos \beta.$$

Ist also FS kleiner als FG , oder $\frac{\sin B \cdot \cos \alpha}{\sin A \cdot \cos \beta} =$

$\text{Tang } \beta \cdot \cot \alpha$ kleiner als $\cos D$, so sind A und B spiz. Ist $\text{Tang } \beta \cdot \cot \alpha = \cos D$, so ist $A = 90^\circ$. Ist $\text{LF} \cdot \cos D = GF$ oder $\text{Tang } \alpha \cdot \cot \beta = \cos D$, so ist A stumpf, $B = 90^\circ$, und so weiter.

Der Winkel Δ ist immer spiz, ungeachtet die Formel $\cos \Delta = \frac{\cos D - \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$ vermuthen läßt,

daß Δ stumpf seyn könnte, wenn A und B stumpf sind, und $\cos A \cdot \cos B$ grösser als $\cos D$ wäre. Wir haben in der bey dem vorigen Falle gegebenen Regel einen sicheren Weegweiser.

4ter Fall. D spiz, α und β stumpf. (Fig. 38.)

Man construire $HFI = D$, die auf den Schenkeln senkrechten PF und RF , den Winkel $FHG = \beta - 90^\circ$. In entgegengesetzter Richtung $FIK = \alpha - 90^\circ$. Durch die somit bestimmten Punkte G und K ziehe man senkrechte, die sich in C schneiden werden. Man mache $GA = GH$, und mit CA beschreibe man einen Kreis, so ist $ACB = A$, $DCE = B$, beede stumpf; Δ kann spiz oder stumpf seyn.

8ter Fall. D , α und β stumpf. (*Fig. 39.*)

Es sey $HFI = D$. Man siehe die auf jedem der Schenkel in F senkrechten FP , FR , construire der Winkel $FHG = \beta - 90^\circ$. und $FIK = \alpha - 90^\circ$, und durch die nunmehr bestimmte Punkte G , K ziehe man senkrechte. Sie schneiden sich in C . Man mache $GA = GH$ und beschreibe den Kreis. Er schneidet RF in E , und es ist $ACB = A$ stumpf; $ECD = B$ spiz.

Allein man sieht leicht, dafs die Grösse dieser Seiten von der Lage des Punktes K abhange, und die Konstruktion diese Resultate gegeben habe, weil wir α grösser als β genommen haben. Rückt K näher an F , das ist, nimmt man α kleiner, so nimmt A ab, und B zu. Es bestimmt demnach das Verhältnifs von FT , FS etc. zu FG , ob A und B spiz oder stumpf seyen. Nun ist $FT = FK = \frac{\sin B \cdot \cos \alpha}{\cos RFT}$; $FG = \sin A \cdot \cos \beta$, und somit $FT : FG = \tan \beta \cdot \cot \alpha : \cos D$.

Rückt demnach K nach L , so ist B ein Quadrant, A stumpf; zwischen L und N , sind A und B stumpf. . . Fällt C in G , so ist A ein Quadrant, B stumpf. Rückt K noch näher an F , etwa nach V , so ist A spiz, B stumpf.

Der dritte Winkel Δ kann spiz oder auch stumpf seyn.

6ter und 7ter Fall. D stumpf $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ stumpf, } \beta \text{ spiz} \\ \alpha \text{ spiz, } \beta \text{ stumpf.} \end{array} \right.$

(Fig. 40.)

Die Construktion bleibt immer dieselbe; $FHG = 90^\circ - \beta$, $FIK = \alpha - 90^\circ$. Die auf FP und FR in K und G senkrechten bestimmen den Durchschnits-Punkt C , und der durch $GA = GH$ auf FP bestimmte Punkt A gibt den Radius CA . Der Kreis schneidet FR in E , und es ist A stumpf, B spiz, das ist die Seiten und die ihnen gegenüberliegende Winkel sind gleichartig. Der Winkel Δ kann spiz oder stumpf seyn.

§. 58. Mittels dieser Construktionen findet man sich immer zu recht. Macht man nun die Anwendung auf das vorige Rechnungs-Schema, so hebt sich leicht der Zweifel, ob die halbe Summe der beeden Seiten $\frac{1}{2}(A+B) = 129^\circ, 45', 40''$, oder $50^\circ, 14', 20''$ sey; die Construktion zeigt nemlich, daß beede Seiten stumpf seyen. Will man aber dieses durch Rechnung ausmitteln, so untersuche man ob $Tang \alpha. Cot \beta$ grösser oder kleiner sey als $Cos D$.

Nun ist: $\log. Tang 121^\circ = \log. Cot 31^\circ = 0,2212263.$

$\log. Cot 80^\circ = 9,2463188.$

$\log. Summae = 9,4675451.$

$\log. Cos D = 9,9524500.$

also $Tang \alpha. Cot \beta$ kleiner, als $Cos D$, folglich beede Seiten stumpf.

Note. Man vergesse nicht, daß unser Exempel nicht zum zweyten, sondern zum dritten Falle gehöre, wo demnach die Buchstaben zu versezen sind.

§. 59. Man braucht nicht immer alle unbekannten Seiten und Winkel eines Dreyekes zu berechnen, wenn man nur einen einzelnen Winkel, oder eine Seite zu kennen wünscht. Dann verfährt man folgender massen. Man macht die eine der unbekannten Seiten zur Basis, z. B. die Seite B , welche dem Winkel β gegenüber liegt. Durch die Spitze des Winkel β legt man eine Vertikal-Ebene auf die Seite B , welche also ins Dreyek fällt, wenn der anliegende Winkel α spiz ist, ausserhalb desselben, wenn er stumpf ist. Diese Ebene bildet mit der gegebenen Seite D ein rechtwinklichtes Dreyek, dessen Hypothenuse diese Seite ist, und dessen Winkel $= 180^\circ - \alpha$ ist. Es sey der andere Winkel $= \epsilon$, so ist nach §. 33, $\text{Cot } \epsilon = \text{Cos } D. \text{Tang } \alpha$; weil in unserem Exempel α spiz ist.

Mit der Seite A bildet die Vertikal-Ebene ebenfalls ein rechtwinklichtes Dreyek. Die dieser Seite anliegenden Winkel sind Δ und $\beta \mp \epsilon$, je nachdem die Vertikal-Ebene in, oder ausser dem Dreyeke liegt.

Die Winkel ϵ , und $\beta \mp \epsilon$ sind also in Beziehung auf die Seite B Vertikal-Winkel, und nach der Analogie §. 51, ist.

$$\text{Sin } \epsilon : \text{Sin } \beta \mp \epsilon = \text{Cos } \alpha. \text{Cos } \Delta.$$

Das Rechnungs-Schema ist folgendes, wenn D , α und β die Werthe wie im vorigen Artikel haben.

$$\begin{array}{ll}
 \log. \cos D = 9,9524500. & \log. \cos \alpha = 9,2396702. \\
 \log. \tan \alpha = 0,7536812. & \log. \sin(\beta - \epsilon) = 9,9733427. \\
 \log. \cot \epsilon = 0,7061312. & \text{Comp. l. Sin } \epsilon = 0,7143722. \\
 \epsilon = 11^{\circ}, 7', 47''; 109^{\circ}, 52', 13'' & \log. \cos \Delta = 9,9273851. \\
 & \Delta = 32^{\circ}, 13'.
 \end{array}$$

Will man direkt eine Seite, zum Beyspiel, die Seite A bestimmen, so verfähre man wie zuvor, bestimme ϵ und $\beta + \epsilon$, und dann findet man die Seite durch die Analogie §. 53. $\cos \epsilon = \cos(\beta - \epsilon) = \cot D : \cot A$.

$$\begin{array}{l}
 \log. \cot D = 0,3055933. \\
 \log. \cos(\beta - \epsilon) = 9,5313418. \\
 \text{Comp. log. } \cos \epsilon = 0,0082457. \\
 \log. \cos A = 9,8451808. \quad \text{also } A = 125^{\circ}.
 \end{array}$$

Auf dieselbe Art kann auch B bestimmt werden, indem man A zur Basis annimmt, und eben so verfährt. Ob die gefundenen Grössen spiz oder stumpf seyen, erkennt man aus der Gleich- oder Ungleichartigkeit der Faktoren ihre Gleichungen. Man sieht also, daß ϵ spiz sey, weil D und α spiz sind.

Da ferners ϵ kleiner ist als β , so müssen Δ und α gleichartig, und also Δ spiz seyn, weil α spiz ist; wäre ϵ grösser als β , so wäre Δ stumpf.

Beyde Rechnungs-Arten leisten dasselbe; allein bequemer scheint die erstere; und die Konstruktionen legen sinnlich vor Augen, was sonst nur durch angestrengte Imagination im Raume gedacht werden kann.

§. 60. Es ist nach §. 42. und 56.

$$\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B.$$

Entwickelt man aus der Gleichung §. 55. die Werthe von $Tang \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ und $Tang \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$, substituirt und verfährt man wie dort gezeigt wurde, so hat man

$$Tang \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = Cot \frac{1}{2} \Delta \cdot \frac{Cos \frac{1}{2} (A - B)}{Cos \frac{1}{2} (A + B)}$$

$$Tang \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = Cot \frac{1}{2} \Delta \cdot \frac{Sin \frac{1}{2} (A - B)}{Sin \frac{1}{2} (A + B)}$$

Anmerkung. Diese zwey Gleichungen geben die Summe und die Differenz beeder unbekannten Winkel, wie folgendes Rechnungs-Schema zeigt. Es sey $A = 125^\circ$, $B = 134^\circ, 31', 20''$, $\Delta = 32^\circ, 13'$; also $\frac{1}{2} (B + A) = 129^\circ, 45', 40''$. $\frac{1}{2} (B - A) = 4^\circ, 45', 40''$.

$$log. Cot \frac{1}{2} \Delta = 0,5394367.$$

$$log. Cos \frac{1}{2} (B - A) = 9,9985006.$$

$$Comp. log. Cos \frac{1}{2} (B + A) = 0,1940994.$$

$$log. Tang \frac{1}{2} (\beta + \alpha) = 0,7320367.$$

$$\frac{1}{2} (\beta + \alpha) = 10^\circ, 30', \text{ oder } 100^\circ, 30',$$

$$log. Cot \frac{1}{2} \Delta = 0,5394367.$$

$$log. Sin \frac{1}{2} (B - A) = 8,9190858.$$

$$Comp. log. Sin \frac{1}{2} (B + A) = 0,1142331.$$

$$log. Tang \frac{1}{2} (\beta - \alpha) = 9,5727556.$$

$$\frac{1}{2} (\beta - \alpha) = 20^\circ, 30',$$

Nun ist einleuchtend, dafs $\frac{1}{2} (\beta + \alpha)$ grösser als $\frac{1}{2} (\beta - \alpha)$ sey, allein nicht immer zeigt sich dieses so bestimmt; die Construktion weist uns zurecht.

§. 61. Aufgabe. Es sind zwey Seiten A und D , und der von ihnen eingeschlossene Winkel β gegeben. Man soll das Dreyek construiren.

Auflösung. Acht Fälle sind möglich.

- | | |
|--|--|
| 1. A , D und β spiz. | 6. A stumpf, D und β spiz. |
| 2. A , D spiz, β stumpf. | 6. A stumpf, D spiz, β stumpf. |
| 3. A spiz, D stumpf, β spiz. | 7. A stumpf, D stumpf, β spiz. |
| 4. A spiz, D und β stumpf. | 8. A , D und β stumpf. |

1ter Fall. A , D und β spiz (Fig. 41.)

Man construire A und D . $AG = \sin A$, verlängere man unbestimmt; denn da β spiz ist, so liegt der Punkt F in der Fortsetzung von AG . Auf dieser Fortsetzung nimm man $GF = \sin A \cdot \cos \beta$, so ist F bestimmt. Vom Punkte F ziehe man eine senkrechte auf den Radius CD , und verlängere sie von der linken zur rechten, bis sie die Peripherie in E schneidet, dann ist $DCE = B$.

Die Seite B ist immer spiz. aber α kann spiz oder stumpf seyn, je nachdem der Punkt D inner der Grundfläche D oder ausser derselben zwischen CD und E liegt. Im ersten Falle ist α spiz und das Segment M kleiner als die Grundfläche D , und somit $D = M + R$. Im ersten Falle ist $FG = \sin A \cdot \cos \beta$ kleiner als $CG \tan D = \cos A \cdot \tan D$ oder $\cos \beta$ kleiner als $\cot A \cdot \tan D$; im 2ten Falle ist $\cos \beta$ grösser als $\cot A \cdot \tan D$.

Der dritte Winkel Δ kann spiz oder stumpf seyn. Darüber gibt die Construktion unmittelbar Auskunft, und nach selber ist Δ spiz, wenn $\sin D \cdot \cos \beta \cdot \cos A$ kleiner ist, als $\cos D \cdot \sin A$, oder $\cos \beta$ kleiner als $\cot D \cdot \tan A$. Ist $\cos \beta = \cot D \cdot \tan A$, so ist $\Delta = 90^\circ$. Ist $\cos \beta$ grösser, so ist Δ stumpf.

2ter Fall. A und D spiz, β stumpf. (Fig. 42.)

Sind A und D construirt, so bestimme man den Punkt F auf AG durch den Winkel $HGA = 180^\circ - \beta$. Von F ziehe man eine senkrechte auf CD , oder, wenn dieses nicht möglich ist, auf ihre Fortsetzung Cd , und verlängere sie bis an die Periferie in E, E' , so ist DCE oder $D'CE' = B$, also stumpf oder spiz, je nachdem die senkrechte dem Radius Cd oder CD trifft.

Die Construktion zeigt den einen wie den anderen Fall bestimmt an; will man aber durch Rechnung denselben ausmitteln, so ziehe man $GR = \sin A \cdot \cos \beta \cdot \sin D$ senkrecht auf FE . Ist nun, $\sin A \cdot \cos \beta \cdot \sin D$ kleiner als $CP = \cos A \cos D$, oder $\cos \beta$ kleiner als $\cot A \cdot \cot D$, so ist B spiz. Ist $\cos \beta = \cot A \cdot \cot D$ so ist $B = 90^\circ$, ist $\cos \beta$ grösser, so ist B stumpf. Der Winkel α ist immer spiz, auch Δ ist spiz; denn wäre $\Delta = 90^\circ$, so müßte, wie die Construktion ausweiset D stumpf seyn.

3ter Fall. A spiz, D stumpf, β spiz. (Fig. 43.)

Ist der Punkt F in der Fortsetzung von AG durch A und β gefunden, so ziehe man auf CD , oder ihre Fortsetzung Cd eine senkrechte; so bestimmen E, E' die Seite $DCE, DCE' = B$, die im ersten Falle spiz, im zweyten stumpf ist.

Ob B spiz oder stumpf sey, hängt vom Verhältnisse $GE:GC$, oder $\sin A \cdot \cos \beta \cdot \tan D: \cos A$, oder $\cos \beta: \cot A \cdot \cot D$ ab. Ist GL grösser als GC , so ist B spiz. Ist $GL = GC$, so ist B ein Quadrant; ist GL kleiner als GC , so ist B stumpf. α ist immer spiz. Δ ist stumpf.

4ter Fall. A spiz, D und β stumpf. (Fig. 44.)

Der Punkt F liegt in AG . Die senkrechte von diesem Punkte aus kann nur die Verlängerung Cd treffen, also ist B immer stumpf. Der Winkel α kann spiz oder stumpf seyn. Ist $D = BCD$, so ist α spiz. Ist $BCD' = D$, und gehet somit die Verlängerung Cd' zwischen F und G durch, so ist α stumpf. Es ist nemlich, wenn $\sin A \cdot \cos \beta \cdot \tan D = \cos A$, oder $\tan D = \frac{\cot A}{\cos \beta}$ ist,

$\alpha = 90^\circ$. Ist D grösser, so ist α stumpf, ist D kleiner, so ist α spiz.

Wenn α stumpf ist; so ist auch Δ stumpf. Wenn α spiz ist, so kann Δ spiz oder stumpf seyn, wie im ersten Falle. Die Seiten D und B sind die Supplemente der Seiten B und D im ersten Falle.

5ter Fall. A stumpf, D spiz, β spiz. (Fig. 45.)

Es sey $ACB = A$, $DCB = D$. Auf der Verlängerung von AG wird F bestimmt, und von F eine senkrechte auf CD , oder ihre Verlängerung Cd gezogen. Trifft diese senkrechte den Radius CD , so ist B spiz; trifft sie den Mittelpunkt C , so ist $B = 90^\circ$, trifft sie den Radius Cd , so ist B stumpf. Ist $\sin A \cdot \cos \beta \cdot \tan D = \cos A$, oder $\cos \beta = \cot A \cot D$, so ist B ein Quadrant. Ist $\cos \beta$ grösser, so ist B spiz. Ist $\cos \beta$ kleiner, so ist B stumpf, α ist immer stumpf; Δ immer spiz.

6ter Fall. A stumpf, D spiz, β stumpf. (Fig. 46.)

Der Punkt F wird in AG bestimmt. Von F zieht man eine senkrechte, welche nie CD , sondern nur die Fortsetzung treffen kann. Es ist also B immer stumpf.

Aber α kann spiz, oder stumpf seyn, je nachdem Cd , die Periferie linker Hand von F , oder rechts zwischen F und G schneidet. Im ersten Falle ist α stumpf; im zweyten spiz. Ist α spiz, so ist Δ immer spiz. Ist α stumpf, so kann Δ spiz oder stumpf seyn; Die Seiten A und B sind die Supplemente der Seiten des ersten Falls.

7ter Fall. A und D stumpf, β spiz. (Fig. 47.)

Der Punkt F liegt also in der Fortsetzung von AG , und somit ist B immer spiz; α ist stumpf; Δ kann spiz oder stumpf seyn.

8ter Fall. A , p und β stumpf. (Fig. 48.)

Der Punkt F liegt in AG . Die senkrechte kann CD , oder auch ihre Fortsetzung Cd treffen. Im ersten Falle ist B spiz, im 2ten ist B stumpf. Ist $GL' = \sin A$. $\cos \beta \tan D$ grösser als CG so ist B stumpf; Ist $\cos \beta = \cot A \cdot \cot D$, so ist $B = 90^\circ$, ist $\cos \beta$ kleiner, so ist B spiz. α und Δ sind immer stumpf.

§. 62. Die gewöhnlichen Methoden sind bequem, wenn man nicht das ganze Dreyek, sondern nur einzelne unbekannte Grössen berechnen will. Da A und β gegeben sind, so kennt man M , und es ist $\tan A \cdot \cos \beta = \tan M$, und da $R = D + M$ ist, so kennt man auch R .

Nun ist nach der Analogie §. 45.

$$\cos M : \cos R = \cos A : \cos B,$$

also findet man $\cos B$.

Sucht man aber den der Seite A gegenüberliegenden Winkel α , so hat man, $\sin M : \sin R = \cot \beta : \cot \alpha$.

Es sey $A = 125^\circ$, $D = 26^\circ, 19', 30''$, $\beta = 121^\circ$.

$$\log. \text{Tang } A = 0,1547732.$$

$$\log. \text{Cos } \beta = 9,7118393.$$

$$\log. \text{Tang } M = 9,8666125, \quad M = 36^\circ, 20', 10''.$$

Das Segment M ist spiz, weil A und β gleichartig, und also $(- \text{Cos } \beta) \cdot (- \text{Tang } A) = (+ \text{Tang } M)$, und da M grösser als D , so ist $R = M - D = 10^\circ, 00', 40''$.

$$\log. \text{Cos } A = 9,7585913.$$

$$\log. \text{Cos } R = 9,9933663.$$

$$\text{Comp. log. Cos } M = 0,0939048.$$

$$\log. \text{Cos } B = 9,8458624. \quad B = 104^\circ, 31', 20''.$$

B ist stumpf, weil $\text{Cos } M$ und $\text{Cos } R$ positiv, $\text{Cos } A$ negativ ist, also $\text{Cos } B$ auch negativ seyn muss. Man sucht nun α .

$$\log. \text{Sin } R = 9,2401476.$$

$$\log. \text{Cot } \beta = 9,7787737.$$

$$\text{Comp. log. Sin } M = 0,2272963.$$

$$\log. \text{Cot } \alpha = 9,2462176.$$

Da nun $\text{Sin } M$, $\text{Sin } R$ positiv, $\text{Cot } \beta$ negativ ist, so sollte also $\text{Cot } \alpha$ auch negativ, und also α stumpf $= 110^\circ$ seyn, allein dieses ist falsch; α ist spiz, und es ist also offenbar unrichtig, dass das Produkt einer positiven und einer negativen Grösse negativ sey.

Vega lehrt, dass ohne Rücksicht auf die algebraischen Zeichen α und β gleichartig seyen, wenn M kleiner als D , ungleichartig, wenn M grösser als D ; also wäre

richtig α spiz, und $= 80^\circ$. Man hätte sich also um 20 Grade geirret. Hier gehöret diese Aufgabe zum 6ten Falle, und die Constrnkzion zeigt, daß Cd zwischen F und G durchgehe, also α spiz sey.

Man betrachte die Seite A als die Basis, und suche ihre Segmente, die wie P und Q nennen wollen; so hat man

$$\log. \text{Tang } D = 9,6944068,$$

$$\log. \text{Cos } \beta = 9,7118393.$$

$$\log. \text{Tang } P = 9,4062461. \quad P = 14^\circ, 17', 34''.$$

Da $\text{Cos } \beta$ negativ, $\text{Tang } D$ positiv ist, so sollte also $\text{Tang } P$ negativ, und P stumpf seyn. Es zeigt aber die Construkzion, daß P spiz sey, und somit $R = A + P = 139^\circ, 17', 34''$.

Nach Vega sollte auch P stumpf seyn, denn D und β sind ungleichartig; also $P > 90^\circ$.

Man suche den der Seite D gegenüberliegenden Winkel Δ .

$$\log. \text{Sin } R = 9,8143768.$$

$$\log. \text{Cot } \beta = 9,7787737.$$

$$\text{Comp. log. Sin } M = 0,6075197.$$

$$\log. \text{Cot } \Delta = 0,2006702, \quad \Delta = 32^\circ, 13'.$$

Nach den Zeichen-Regeln der Abgaben sollte $\text{Cot } \Delta$ negativ, und folglich Δ stumpf seyn; dieses ist unser 4ter Fall, wenn man die Buchstaben ändert; aus demselben ist zu ersehen, daß der der spizen Seite gegenüberliegende Winkel spiz oder stumpf seyn könne. Auch Vegas Regeln führen uns in diesem Falle irre.

§. 62. Aufgabe. Aus den 3 gegebenen Seiten die drey Winkel zu bestimmen. (Fig. 49.)

Auflösung. Es sey, wie immer, $ACD = A$; $BCD = D$; $DCE = B$. Man verlängere AG und EK bis sie sich in einem Punkte F schneiden. Auf AF und EF errichte man FH und FI senkrecht. Man durchschneide FH mit einem Bogen vom Radius AG , und ziehe GH , so ist $HGF = \beta$. Man durchschneide FI mit einem Bogen vom Radius EK und ziehe IK , so ist $IKF = \alpha$.

Beweis. Diese Construktion ist ohne ferneren Beweise denen deutlich, die das bisher gesagte verstanden haben.

Anmerkung. Durch Substitutionen und algebraische Evolutionen findet man wohl die Gleichungen zwischen den Winkeln und den Seiten; allein es wird von dem Geometer verlangt, daß er sie durch geometrische Construktion erweise.

In der 49ten Figur ziehe man GM senkrecht auf CD , so ist $CM = \cos A \cdot \cos D$, also $KM = \cos B - \cos A \cdot \cos D$. Auf GM ziehe man FL senkrecht, so ist $FL = RM$, und der Winkel $GFL = 90^\circ - D$.

Nun ist $FL : FG = 1 : \frac{1}{\sin D} = \cos B - \cos A \cdot \cos D$;
 $\frac{1}{\sin D}$, also $FG = \frac{\cos B - \cos A \cdot \cos D}{\sin D}$.

Es ist aber auch $FG = GH \cdot \cos HFG = \sin A \cdot \cos \beta$, also ist;

$$\cos \beta = \frac{\cos B}{\sin A} = \frac{\cos A}{\sin D}; \text{ eben so findet man,}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos A}{\sin B} = \frac{\cos B}{\sin D}.$$

$$\cos \Delta = \frac{\cos D - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

§. 63. Da diese Formeln zum Gebrauche der Logarithmen nicht bequem sind, so war man darauf bedacht, andere zu erfinden, die aber auch nur durch algebraische Operationen erwiesen sind. (Fig. 50.)

Es seyen die drey gegebenen Seiten wie immer construirt, und der Punkt F durch den Durchschnitt der Sinus der Seiten A und B bestimmt. Man verlängere die Sinus bis an die Periferie in S und N , ziehe SN , und AE , so ist $AF = \sin A (1 + \cos \beta) = 2 \sin A \cos^2 \frac{1}{2} \beta$; $FN = \sin A (1 - \cos \beta) = 2 \sin A \sin^2 \frac{1}{2} \beta$; $EF = \sin B (1 + \cos \alpha) = 2 \sin B \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$; $FS = \sin B (1 - \cos \alpha) = 2 \sin B (\sin^2 \frac{1}{2} \alpha)$.

Ferner ist $AE = 2 \sin \frac{1}{2} (A + B + D)$; $SN = 2 \sin \frac{1}{2} (A - (D - B))$ der Winkel $EAN = \frac{1}{2} (B + D - A)$; der Winkel $ANS = \frac{1}{2} (A + D - B)$.

Man ziehe die senkrechte EP auf AN , so ist $FP = EF$. $\sin EFN = 2 \sin B \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$. $\sin D = AE$. $\sin EAN = 2 \sin \frac{1}{2} (B + D + A)$. $\sin \frac{1}{2} (B + D - A)$; also ist:

$$2 \sin B \sin D \cos^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} (B + D + A) \sin \frac{1}{2} (B + D - A).$$

$$\text{folglich: } \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (B + D + A) \sin \frac{1}{2} (B + D - A)}{\sin B \sin D}}.$$

Man ziehe SR senkrecht auf AN , se ist:

$$SR = SF. \sin SFA = 2 \sin B. \sin^2 \frac{1}{2} \alpha. \sin D. = \\ SN. \sin ANS = 2 \sin \frac{1}{2} (A + (D - B)), \text{ also:}$$

$$2 \sin B. \sin D. \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 2 \sin^2 \frac{1}{2} (A + (D - B)). \\ \sin \frac{1}{2} (A - (D - B)).$$

folglich:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (A + (D - B)) \cdot \sin \frac{1}{2} (A - (D - B))}{\sin B. \sin D.}}$$

Diese Formel unterliegt kleiner Zweydeutigkeit, weil $\frac{1}{2} \alpha$ immer spiz ist. Wie auf eine ähnliche Weise $\frac{1}{2} \beta$, $\frac{1}{2} \Delta$ gefunden werde, wäre überflüssig besonders auszuführen.

§. 64. Die Construktions-Art ist mit geringen Modificationen für alle 8 Fälle oder Combinationen der drey gegebenen Grössen dieselbe.

1ter Fall. A , B und D spiz.

Die Construktions dieses Falles, die in der Figur 49 dargestellt ist, ist schon oben gezeigt worden. Indessen ist zu erinnern, daß in diesem Falle nur zwey Winkel nothwendig spiz seyen; der dritte kann spiz, oder stumpf seyn. Wäre $DCE' = B$, so wäre $CK = \cos B$ kleiner als $CM = \cos A. \cos C$. Die verlängerte $E'K'$ würde nicht die Verlängerung von AG , sondern die Linie AG selbst treffen, somit läge F' in AG , und der anliegende Winkel β wäre stumpf. Wenn also $\cos A. \cos D$ grösser als $\cos B$, so ist β stumpf. Wenn $\cos A. \cos D = \cos B$, so ist $\beta = 90$, ist $\cos A. \cos D$ kleiner als $\cos B$, so ist β spiz.

Anmerkung. Zweifelt man, ob ein Winkel spiz oder stumpf sey, so kann man durch die Rechnung zum Ziele gelangen, indem man den Werth von $\cos A \cdot \cos D$ sucht, und mit $\cos B$ vergleicht. Die Construktion ersparret die Rechnung. Gesezt man wollte wissen, ob in der Figur 52. der Winkel Δ spiz oder stumpf sey.

Durch C und F lege man CR , und construire $RM = \text{Tang } M$; $RN = \text{Tang } R$. Man nemme $BL = AG$, so ist $BLR = \mu$, denn $\sin A \cdot \sin \mu = \sin M$. Man ziehe MH pararell mit BL , so ist $MHR = BLR = \mu$. Es ist demnach $HR = \text{Tang } M \cdot \cot \mu$, und da $\text{Tang } M = \text{Tang } A \cdot \cos \beta$; $\cot \mu = \cot A \cdot \text{Tang } \beta$ ist, so ist $HR = \sin A \cdot \sin \beta$.

Verfährt man auf dieselbe Art im Segmente R , so findet man $\text{Tang } R \cdot \cot \epsilon = \sin B \cdot \sin \alpha$, da nun $\sin A \cdot \sin \beta = \sin B \cdot \sin \alpha$. So ist $HR = \text{Tang } M \cdot \cot \mu = \text{Tang } R \cdot \cot \epsilon$, folglich $MHN = \Delta$.

Ein in MH angelegter Winkelhaken hebt also in den meisten Fällen den Zweifel.

2te Anmerkung. In der Figur 51. ist der Fall construiert, wo die drey Seiten spiz, und der der größten Seite $ACB = A$ gegenüberliegende Winkel α stumpf ist. Die Stumpfheit dieses Winkels offenbaret sich dadurch, daß der Punkt F im Sinus KE der demselben anliegenden Seite B ist.

Man ziehe KM senkrecht auf CB , so ist $CB = \cos B \cdot \cos D$, und da $CG = \cos A$ ist, so ist $\cos A$ kleiner als $\cos B \cdot \cos D$. Es ist somit $GH = \cos B \cdot \cos D -$

$$\cos A = KL; \text{ Nun ist } KF = KL = \frac{\cos B \cdot \cos D - \cos A}{\cos FKL \sin D}$$

auch ist $KF = KI \cdot \cos IKF = \sin B \cdot \cos \alpha$, also ist:

$$\frac{\cos B \cdot \cos D - \cos A}{\sin D} = \sin B \cdot \cos \alpha, \text{ und } \cos \alpha =$$

$$\frac{\cos B \cdot \cos D - \cos A}{\sin B \cdot \sin D}.$$

Da nun der Winkel $IKF = 180^\circ - \alpha$ ist, so ist $\cos \alpha$ negativ, das ist die obige Gleichung gibt den Cosinus des Supplements des Neigungs-Winkels.

2ter Fall. A und B spiz, D stumpf. (Fig. 52.)

Da A und B spiz sind, D stumpf, so kann F nicht ausser der Grundfläche D liegen, und muß somit in den Verlängerungen von AG und EK liegen. Es ist also α und β spiz. Der Winkel Δ ist aber immer stumpf, denn wäre $\Delta = 90^\circ$, so müßte die Hypothenuse D auch spiz seyn, weil beede Catheten spiz sind.

3ter und 4ter Fall. A spiz, B stumpf } D spiz. (Fig. 53.)
 A stumpf, B spiz }

Der Punkt F liegt ausser der Grundfläche im Sinus der spizen, und in der Fortsetzung des Sinus der stumpfen Seite. Es ist also der der spizen Seite anliegende Winkel stumpf, der der stumpfen Seite anliegende Winkel spiz, der Winkel Δ ist immer spiz.

5ter und 6ter Fall. A spiz, B stumpf } D stumpf. (Fig. 54.)
 A stumpf, B spiz }

Der Punkt F kann in der Grundfläche D und folglich in der Fortsetzung der Sinus beeder Seiten, oder

auch ausser derselben und folglich in dem Sinus der spizen, und in der Fortsetzung des Sinus der stumpfen Seite liegen. Es können also α und β spiz seyn; sie können aber auch ungleichartig, und der der kleineren Seite anliegende Winkel kann spiz oder auch stumpf seyn.

Ist $ECD = B$, so ist F in der Fläche D ; α und β sind spiz.

Ist $E'CD = B$, so ist F ausser der Fläche D , α stumpf, β spiz.

Der Winkel Δ kann spiz oder stumpf seyn; Ist α spiz, so ist Δ stumpf. Ist α stumpf, so kann Δ spiz oder stumpf seyn.

7ter Fall. A und stumpf, D spiz. (Fig. 55.)

Der Punkt F liegt in der Fortsetzung, oder im Sinus der grösseren Seite, also kann der ihr anliegende Winkel spiz oder stumpf seyn. Der der kleineren Seite anliegende Winkel ist immer stumpf. Hier ist demnach α immer stumpf, weil A grösser ist als B ; β kann aber spiz oder stumpf seyn. Auch Δ kann spiz oder stumpf seyn.

8ter Fall. A , B und D stumpf. (Fig. 56.)

Die drey Winkel sind immer stumpf.

Anmerkung. Bey Berechnung der unbekannten Winkel bedient man sich selten der Formeln §. 62, sondern zieht die Formeln §. 63 vor, weil sie für den Gebrauch der Logarithmen bequem sind, und keine Zweydeutigkeit dabey statt findet. Setzt man $\frac{1}{2}(A+B+D)=P$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin P \cdot \sin (P-A)}{\sin B \cdot \sin D}}$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\sin (P-B) \cdot \sin (P-D)}{\sin B \cdot \sin D}}$$

Es sey $A = 125^\circ$. $B = 134^\circ, 31', 20''$. $D = 26^\circ, 19', 30''$,
so ist $P = 142^\circ, 55', 25''$, $P-A = 17^\circ, 55', 25''$, also:

$$\log. \sin P = 9,7802304.$$

$$\log. \sin (P-A) = 9,4881962.$$

$$\text{Comp. log. } \sin B = 0,1469235.$$

$$\text{Comp. log. } \sin D = 0,3531433.$$

$$19,7684934 : 2.$$

$$\log. \cos \frac{1}{2} \alpha = 9,8842467. \quad \alpha = 80^\circ.$$

§. 65. Man nemme einen Punkt P im Raume eines Kugel-Dreyekes ober der Grundfläche, und ziehe von demselben eine senkrechte Linie nach jeder der Seiten; so liegen je zwey und zwey dieser senkrechten in einer Ebene, welche auf den beeden gegenüberliegenden Seiten senkrecht ist. Es ist demnach der Winkel, den diese senkrechten bilden, das Supplement des Neigungs-Winkels der Dreyeks-Seiten. Also sind diese 3 senkrechten die Kanten eines Kugel-Dreyeks, dessen Seiten die Supplemente der Winkel des ersteren sind.

Nun ist umgekehrt C ein Punkt im Raume dieses zweyten Kugel-Dreyekes, also sind die Seiten des ersten Kugel-Dreyekes die Supplemente der Winkel des zweyten.

Diese Betrachtung führt uns auf die Erkenntniß, daß man durch die gegebenen drey Winkel eines Kugel-Dreyekes die Seiten desselben finden könne. Man con-

struiren nemlich ein Kugel-Dreyek dessen Seiten die Supplemente der gegebenen Winkel seyen, und suche die Winkel, so sind diese Winkel die Supplemente der gesuchten Seiten,

Man setze die 3 gegebenen Winkel seyen spitz, so werden die Seiten des Supplementar-Dreyekes stumpf seyn.

Es sey (Fig. 56.) $ACB = 180^\circ - \alpha$; $BCD = 180^\circ - \Delta$; $DCE = 180^\circ - \beta$.

Man verlängere CD und CB bis an die Peripherie; ziehe AG senkrecht auf Cb , so ist $AG = \sin \alpha$. Man ziehe EK senkrecht auf Cd , so ist $EK = \sin \beta$. AG und EK schneiden sich in F , also sind die diesem zwey Seiten anliegenden Winkel stumpf, und somit der eine $= 180^\circ - A$, der andere $= 180^\circ - B$.

Auf EK errichte man in F eine senkrechte, und durchschneide sie mittels eines Bogens EK in H , so ist HKF das Supplement des Neigungs-Winkels der Seiten BCD und DCE , und folglich $HKF = A$ und $NF = \sin (180^\circ - \beta) \cos A$.

Man ziehe KL senkrecht auf BC ; KM senkrecht auf AG , so ist $GC = \cos \alpha$, $CL = CK$. $\cos BCD = \cos \beta \cos \Delta$, und $GL = KM = \cos \alpha + \cos \alpha \cos \Delta$, folglich $KF = KM = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \Delta}{\cos FKM \sin KFG \sin \Delta}$.

$= \sin \beta \cos A$, also $\cos A = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \Delta}{\sin \beta \sin \Delta}$.

§. 66. Unsere Geometer entwickeln diese Gleichung aus den drey Gleichungen §. 62, indem sie aus denselben $\sin B$, $\cos B$, $\sin D$, $\cos D$ eliminiren; diese

Operation ist mühesam und verwiklet, und gibt zuletzt,

$$\cos A = \frac{-\cos \alpha - \cos \beta \cdot \cos \Delta}{\sin \beta \cdot \sin \Delta.}$$

ungeachtet A spiz ist. Darüber verwundert sich la Grange, und weiß sich dieses Räthsel nicht zu erklären. Dieser offenhare Fehler liegt in dem unlogischen Gebrauche der algebraischen Zeichen. Wenn man mit offenen Augen rechnet, findet man richtige Resultate.

Es ist nach §. 51. $\sin \mu : \sin \epsilon = \cos \beta : \cos \alpha.$

$$\sin \mu : \sin (\Delta - \mu) = \cos \beta : \cos \alpha.$$

$$\sin \mu : \sin \Delta \cos \mu - \cos \Delta \sin \mu = \cos \beta : \cos \alpha.$$

$$1 : \sin \Delta \cot \mu - \cos \Delta = \cos \beta : \cos \alpha.$$

$$\text{Es ist aber } \cot \mu = \cos A \tan \beta. = \frac{\cos A \cdot \sin \beta}{\cos \beta}.$$

also :

$$1 : \sin \Delta \cdot \sin \beta \cdot \cos A - \cos \Delta \cos \beta = 1 : \cos \alpha. \text{ folglich}$$

$$\cos A = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \Delta}{\sin \beta \sin \Delta.}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos A &= \cos \beta \cos \Delta + \sin \beta \sin \Delta + \cos \alpha. \\ &= \cos (\beta - \Delta) + \cos \alpha \\ &= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + (\beta - \Delta)) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - (\beta - \Delta)) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} : \sin \beta \sin \Delta. \\ \\ \text{also} \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{1 + \cos A}}{2} = \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + (\beta - \Delta)) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - (\beta - \Delta))}{\sin \beta \cdot \sin \Delta.}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cos A &= \sin \beta \sin \Delta - \cos \beta \cos \Delta - \cos \alpha. \\ &= -\cos (\beta + \Delta) - \cos \alpha. \\ &= -2 \cos \frac{1}{2}(\beta + \Delta + \alpha) \cdot \cos \frac{1}{2}(\beta + \Delta - \alpha) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} : \sin \beta \sin \Delta.$$

$$\frac{\sqrt{1 - \cos A}}{2} = \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(\beta + \Delta + \alpha) \cdot \cos \frac{1}{2}(\beta + \Delta - \alpha)}{\sin \beta \cdot \sin \Delta.}}$$

Hier kommt wider das Zeichen (—) hinter dem Wurzel-Zeichen zu stehen, woraus also folgen würde, daß

$\sin \frac{1}{2} A$ eine unmögliche Grösse sey; allein die Summe der drey Winkel ist immer grösser als 180° , also die halbe Summe grösser als 90° , folglich ist $\cos \frac{1}{2} (\beta + \Delta + \alpha)$ negativ; dennoch bleibt diese Verfahrens - Art Nonsense, denn $1 - \cos A$ kann nie einer negativen Grösse gleich seyn. Nun ist

$$1 - \cos A = \frac{-\cos (\beta + \Delta) - \cos \alpha}{\sin \beta, \sin \Delta} \text{ negativ.}$$

Dieses führt uns also auf die Wahrnehmung, daß in unserm spizwinklichten Dreyeke die Summe zweyer Winkel grösser als 90 Grade, und der Cosinus dieser Summe grösser, als der Cosinus des dritten Winkels seyn müßte. Ein Satz, dessen Beweis eine Folge des Sazes ist, daß die Summe der drey Winkel grösser als zwey rechte Winkel sey.

§, 67. Da die gegebenen Formeln in diesem Falle alle Zweydeutigkeit heben, so ist die Construktion minder interessant, als bey den übrigen. Es sind, wie immer, auch hier 8 Combinationen möglich, die aber bequem auf 4 reduzirt werden können.

1mo. Alle drey Winkel spiz.

Im diesem Falle sind auch immer alle drey Seiten spiz.

2do. Alle drey Winkel stumpf.

Die dem kleinsten Winkel gegenüberliegende Seite kann spiz oder stumpf seyn.

3tio. Zwey Winkel spiz, einer stumpf.

Die den kleinsten Winkel gegenüberliegende Seite ist spiz, die beeden anderen können spiz oder stumpf seyn.

4to. Zwey Winkel stumpf, der dritte spiz.

Die dem spizen Winkel gegenüberliegende Seite kann spiz oder stumpf seyn; die beeden anderen sind immer stumpf.

§. 68. Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie durch die Construktion die drey Seiten aus den gegebenen Winkeln bestimmt werden können.

Da jeder innerhalb des Dreyeks gelegene Punkt P mittels der von demselben nach den drey Seiten gezogenen senkrechten Linie dasselbe Supplementar-Dreyek giebt, so wollen wir den Punkt F für selben annehmen.

Es sey in der Figur 57. alles wie gewöhnlich, und F der Durchschnits-Punkt der verlängerten Sinus der Seiten A und B . Von F ziehe man eine senkrechte auf die Seite B , so liegt sie in der Winkelfläche der Seiten B und D , und es ist demnach die auf KI senkrechte FL diese senkrechte. Eben so ist FO die auf die Seite A von F gezogene senkrechte.

Nimmt man $KL = KM$; $GP = GO$, so sind M und P die Punkte der Fläche B und A , wo diese senkrechten durchsezen.

Von M ziehe man eine senkrechte MN auf CE ; Von P ziehe man eine senkrechte auf CA , so ist $EN = AQ$. Denn es ist $KL = KM = \sin B \cdot \cos^2 a$, also $MF =$

$\sin B = \sin B \cdot \cos^2 \alpha = \sin B \cdot \sin^2 \alpha$, also $EN = \sin^2 B \cdot \sin^2 \alpha$. Eben so beweist man, daß $AQ = \sin^2 A \cdot \sin^2 \beta$, da nun $\sin A \cdot \sin \beta = \sin B \cdot \sin \alpha$ ist, so ist $EN = AQ$.

Bey der Zusammlegung bilden also die auf der Durchschnits-Linie der Seiten A und B senkrechten MN und PQ dem Winkel Δ ; Mit den Linien FL und FO bilden sie eine viereckigte Fläche mit zwey rechten Winkeln.

Man construire dieses Viereck, und nemme auf KI , $RL = MN$, $FS = FO$, $PQ = SR$, so ist $FLSR$ das verlangte Viereck.

Man verlängere RS zu beeden Seiten; nemme $FT = FI$; Auf FT errichte man eine senkrechte in F , und produziere sie bis sie ST in U schneidet; so ist das Dreyek FUT dem Dreyeke FGH gleich und ähnlich. Zieht man endlich FR , so ist $FRS = \mu$, $FRL = \epsilon$, $SRL = \Delta$.

Hierauf ist folgende Construktzion der Seiten durch die Winkel gegründet.

Man ziehe eine Linie WZ . Auf derselben nemme man einen Punkt F , und errichte die senkrechte Fa . Es sey FI ein Stük derselben von beliebiger Grösse. In I construire man einen Winkel $= 90^\circ - \alpha$, so ist der Punkt K bestimmt. Man errichte in K eine senkrechte DX .

Man ziehe FL senkrecht auf KI , mache den Winkel $LFe = 180^\circ - \Delta$,) $eFb = 90^\circ - \beta$. In F errichte man auf Fb eine senkrechte, und nemme $FT = FI$. In T construire man einen Winkel $= 90^\circ - \beta$, so schneidet der zweyte Schenkel die Linie KI in R , Fe in S , Fb in U .

Auf FW nemme man $KE = KI$; $KM = KL$. Mit $MV = \frac{1}{2} ME$ beschreibe man einen Kreis, und von M ziehe man in demselben eine Sehne $MN = LR$. Durch E und N lege man eine gerade Linie. Sie schneidet DX in C , und es ist $ECD = B$. Mit dem Radius CE beschreibe man einen Kreis. Man nemme $Ud = UT$, und mit einem Bogen vom Radius Fd durchschneide man denselben in A . Man ziehe FA , und von C fälle man eine senkrechte CB auf dieselbe, so ist $ACB = A$, $BCD = D$.

§. 69. Die Konstruktionen ändern sich, je nachdem die Winkel spiz oder stumpf sind. Es sey α spiz, β und Δ stumpf. (Fig. 58.)

Man verfare gerade wie zuvor, und mache $FIK = 90^\circ - \alpha$. Da Δ stumpf ist, so wird LFa spiz, und da β stumpf ist, so mache man $aFe = \beta - 90^\circ$.

Man nemme $KE = KI$, und bestimme den Radius durch $MN = LR$. Man verlängere Fe nach b , und nemme $Ud = UT$. Mit dem Radius Fd durchschneide man die Periferie des Kreises in A , lege eine gerade Linie durch F und A , und auf dieselbe fälle man eine senkrechte CB , so ist $ACB = A$. $BCD = B$ Der zweyte Durchschnits-Punkt A' gehöret zu einem spizen Δ .

§. 70. Zur Berechnung der Flächen bedient man sich der Formeln, welche den Sinus der Hälfte der Seiten geben, weil sie für den Gebrauch der Logarithmen bequem und die Resultate unzweydeutig sind. Es sey $\alpha = 80$, $\beta = 121^\circ$, $\Delta = 32^\circ$, $13'$, so ist $\frac{1}{2} (\alpha + \beta + \Delta) = 116^\circ$, $36'$, $30''$, und $\frac{1}{2} (\beta + \Delta - \alpha) = 36^\circ$, $36'$, $30''$.

$$\log. \cos 115^{\circ}, 36', 30'' = 9,6511706.$$

$$\log. \cos 36^{\circ}, 36', 30'' = 9,9045699.$$

$$\text{Comp. log. Sin. } 121^{\circ} = 0,0669344.$$

$$\text{Comp. log Sin. } 32^{\circ}, 13' = 0,2731731.$$

$$19,8958480: 2.$$

$$\log. \sin \frac{1}{2} A = 9,9479240. \quad \frac{1}{2} A = 62^{\circ}; 30^{\circ}.$$

$$\text{also: } A = 125^{\circ}.$$

§. 71. Die 59te Figur ist eine Methode bey rechtwinklichten Kugel-Dreyeken mechanisch zu bestimmen, ob die gesuchten Grössen spiz oder stumpf seyen.

CB ist die allen Dreyeken gemeine Durchschnits-Linie der Hypothenuse und der anliegenden Cathete, die wir durch B bezeichnen. HCB ist eine stumpfe, HCB eine spize Hypothenuse. F, F' gehören zu den spizen, f, f' zu den stumpfen anliegenden Neigungs-Winkeln. Jede zu F, F', f, f' gehörige Cathete ist mit analogen Buchstaben A, A', a, a' etc. bezeichnet.

Es sey H spiz, a spiz.

Es ist demnach $HCB = H$. Zu dem spizen a gehöret F', D', A' , also $BCD' = B, DCA' = A$, beede spiz.

Es sey H spiz, a stumpf.

Zum stumpfen a gehöret f', d', a' , also $BCd = b, d'Ca' = A$, beede Seiten sind stumpf.

Es sey B spiz, A stumpf.

Es ist BCd die eine, dCa die andere Cathete. a und b weisen auf f , also ist H stumpf, a stumpf.

Es sey A spiz und a spiz.

Es sind ACD , und $A'CD'$ spize Seiten. Zu ACD und DCB gehören F und H , also sind B und H stumpf.

Zu $A'CD'$ und $D'CB$ gehören F' und H , also H und B spiz; Es sind also zwey Dreyeke möglich.

So verfährt man in allen übrigen Fällen. Auf diese Weise könnte ein Blinder dazu gebracht werden, bestimmt anzugeben, ob die im rechtwinklichten Kugel-Dreyeke gesuchten Grössen spiz oder stumpf seyen.

§. 72. Der Verfasser hält es für überflüssig von von den Fällen, wo eine Seite ein Quadrant ist, besonders zu handeln. Wer sich durch das Gesagte in den Construktionen auch nur halb zurecht gefunden hat, erkennt, daß der Punkt F in einem der beeden Radien, welche den Quadranten einschliessen, liegen müsse, und weiß er das, so findet er die Construktionen von selbst. Er sieht, daß ein solches Dreyek entstehe, wenn man zu einem gleichseitigen Dreyeke das zwey Quadranten zu Seitenflächen und folglich 2 rechte Winkel hat, ein gleich-hohes, rechtwinklichtes hinzuthut oder davon wegnimmt.

Nimmt man im ersten Falle A zur Grundfläche und den Quadranten zur Seitenfläche linker Hand, so ist $M = 90^\circ$, und $A = 90^\circ + R$, im zweyten Falle, $A = 90^\circ - R$; $\alpha = \mu + \epsilon = 90^\circ + \epsilon$ im ersten Falle, $\alpha = 90^\circ - \epsilon$ im zweyten Falle.

Nimmt man den Quadranten zur Basis, so ist $M \mp R = 90^\circ$.

Ist er in der gradlinigten Trigonometrie erfahren, und diese wird vorausgesetzt, so weiß er, daß alle Formeln der schiefwinklichten Dreyeke auch für den den Fall

passen, wenn eine Seite, z. B. D ein Quadrant ist, wenn man in denselben $\sin D = 1$, $\cos D = 0$ sezet. Die Construktion aller dieser Fälle hätte eine dritte Kupfer-
tafel erfordert, welches ein Werk vertheuert haben würde, daß doch nur dazu bestimmt ist, eine neue noch lange nicht vollkommen ausgearbeitete Methode bekannt zu machen.

Erst dann, wenn eine zweckmäßige Kritik die Unvollkommenheiten derselben aufgedeket haben wird, kann man hoffen, etwas vollständigeres und vollkommeneres zu liefern. Alle neue Methoden in jedem Theile der Mechanik und Mathematik müssen das Feuer der Kritik aus-
halten, wenn sie für reines Gold cursiren sollen. Wäre auch der Erfinder König Salomo im Glanze seiner Weisheit, führte er einen längeren Titel als Kaiser Karl der 7te, Herr Lorenz Ceell, oder oder So kann ihm keine Potenz der Erde, kein Privilegium vom Pabst und Kaiser eine Immunität a Censura zusichern. Unvernünftige Kritik thut keinen Schaden; vernünftige Kritik ist wohlthätig, nothwendig und besonders denen heilsam, die immer alle Zeitungen mit dem Posaunen-
Liede ihrer Celebrität ausfüllen, und mehr Raum als der Kaiser Napoleon und seine Generäle in denselben ein-
nehmen.

wenn
Die
pfer-
wür-
noch
am
Un-
am
s zu
Me-
us-
ire
is-
der
So
om
en.
ge
nen
en-
ler
in-



Spaun, Franz Anton von

Einleitung zur geometrischen Construktion aller Probleme der sphärischen
Trigonometrie, mittels welcher alle Zweydeutigkeiten der analytischen
Formeln gehoben werden

München 1811

Bibl.Mont. 3658

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10723365-1